

電磁気学 A 期末試験問題

〈担当、山本 智〉

2010年2月8日

注意事項

- (1) 問題は3題あります。3題すべてを解答して下さい。
- (2) ノート、参考書などは持込不可です。
- (3) 最後に講義についての意見、感想を書いてください(評価対象外)。

第1問

- (1) 真空中において、 z 軸方向に流れる無限長直線電流 I がある。直線電流から ρ の距離にある位置での磁場の大きさと方向を求めよ(方向は図で示してもよい)。
- (2) 真空中に一辺の長さが a の正方形のループ回路がある(図 1a)。正方形ループ回路は xy 平面上にあり、その中心は原点に一致する。このループ回路に電流 I が図 1a に示すように流れているとき、原点における磁場の大きさと方向を求めよ。
- (3) (2)において、面積 S をもつ正方形の形をした金属製微小ループをおく(図 1b)。この微小正方形ループの中心は原点にあり、微小ループは x 軸まわりに回転できるようになっている。ある時刻($t=0$)で微小ループは xy 平面上にあり、正方形の各辺は x 軸または y 軸に平行であった。微小ループには小さなギャップ AB があり、 $t=0$ で A と B の位置は図に示したようになっている。いま、この微小ループを x 軸まわりに一定角速度 ω で図のように回転させるとき、ギャップ AB の両端に発生する誘導起電力(B を基準とした A の電圧)を時刻 t の関数として求めよ。なお、微小正方形ループ内で、磁場は原点での磁場と同じと考えてよい。また真空の透磁率を μ_0 とする。
- (4) (3)において、回転している状態でギャップの両端を抵抗で繋ぎ、微小ループに電流が流れるようにした。このとき、微小ループにどのような力が働くか、理由とともに説明せよ。

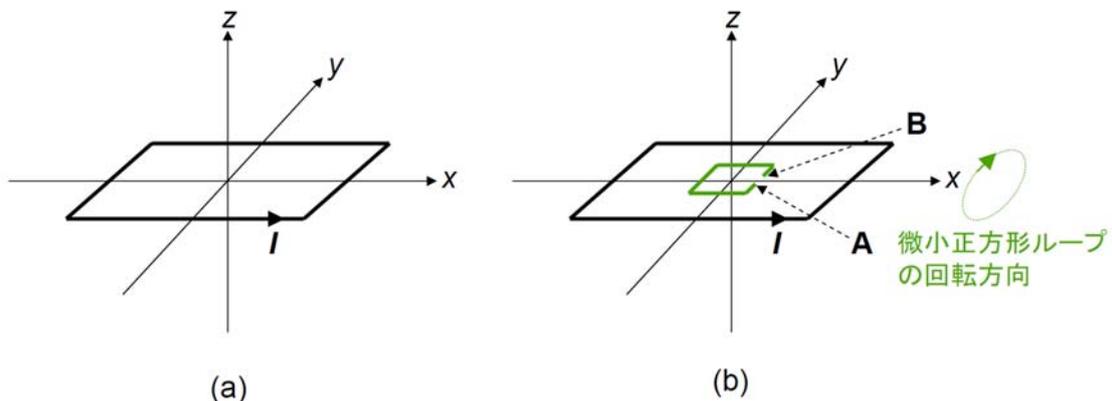


図 1

第2問

- (1) 真空中に、電荷 q と $-q$ (ただし $q > 0$) が距離 d (向きは $-q$ の位置から q の位置に向かう方向) だけ離れた電気双極子が置かれている。2 つの電荷の中心を原点とし、 d の向きを $+z$ 方向にとる。このとき、原点から \mathbf{r} の位置での静電ポテンシャルを求めよ。ただし、 $|\mathbf{r}| \gg |d|$ とし、

$$\left| \mathbf{r} \pm \frac{\mathbf{d}}{2} \right|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} \right)$$

の関係を使ってよい。ここに $r = |\mathbf{r}|$ である。結果は、双極子モーメント $\boldsymbol{\mu} = q\mathbf{d}$ を用いて表せ。なお、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

- (2) 真空中において、 $+z$ 方向に無限一様電場 E_0 がかかった状態で、上記の電気双極子を(1)と同様に置く。このとき、原点から半径 a の球面が等電位面となる。その半径 a を求めよ。なお、この球面は $a \gg |d|$ を満たす位置にできるものとする。

(ヒント：上記の場合、一様電場による静電ポテンシャル V_0 は $V_0 = -E_0 r \cos \theta + C$ と表せる。ここで θ は \mathbf{r} と \mathbf{d} のなす角度、 C は静電ポテンシャルの基準のとりかたによる定数である。)

- (3) (2)の状態の電場 ($r > a$) は、無限一様電場中に半径 a の完全導体球を置いた場合と同じになる。その理由を数行で簡単に説明せよ。

第3問 真空中での電磁波の伝播を考える。電荷、電流ともに存在しないとすると、マックスウェル方程式は次のように表される。

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{a}) \quad \text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{b})$$

$$\text{div}\mathbf{D} = 0 \quad (\text{c}) \quad \text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (\text{d})$$

ここに、 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{B} はそれぞれ電場、磁場、電束密度、磁束密度を表す。

- (1) これらの4つの式は電磁気学のどのような法則を表すものか。それぞれ答えよ。
(2) 上記の4式から \mathbf{E} および \mathbf{H} に関する波動方程式をそれぞれ導き、電磁波の速度 (光速) が真空の誘電率 ϵ_0 と真空の透磁率 μ_0 を用いて $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ と表されることを示せ。

(ヒント：(a) または (b) 式の両辺の rot をとり、任意のベクトル \mathbf{A} について成り立つ公式 $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ を用いる。)

- (3) z 方向に進行する平面波の電磁波を考え、この電磁波が電場・磁場についてそれぞれ横波であることを示せ。