RESCEU夏の学校(青森)　　　　３1. Aug. 2008

重力レンズにおける摂動論

浅田秀樹

（弘前大学　理工学部）

§1. はじめに

重力レンズ

直接、重力（質量）を反映

対象

ダークエネルギー

ダークマター

ダークオブジェクト(系外惑星等)

異なるアプローチ(モデル化)

流体近似（連続体）

宇宙論的重力レンズ

レンズ＝銀河、銀河団、大構造

質点近似（離散性）

マイクロ重力レンズ

レンズ＝星、惑星、MACHO

疑問（その１）

レンズ ＝ N質点

↓ $N \Rightarrow \infty$

レンズ ＝ 連続体

一致するはず（証明？）

N有限性の効果は？

すでに

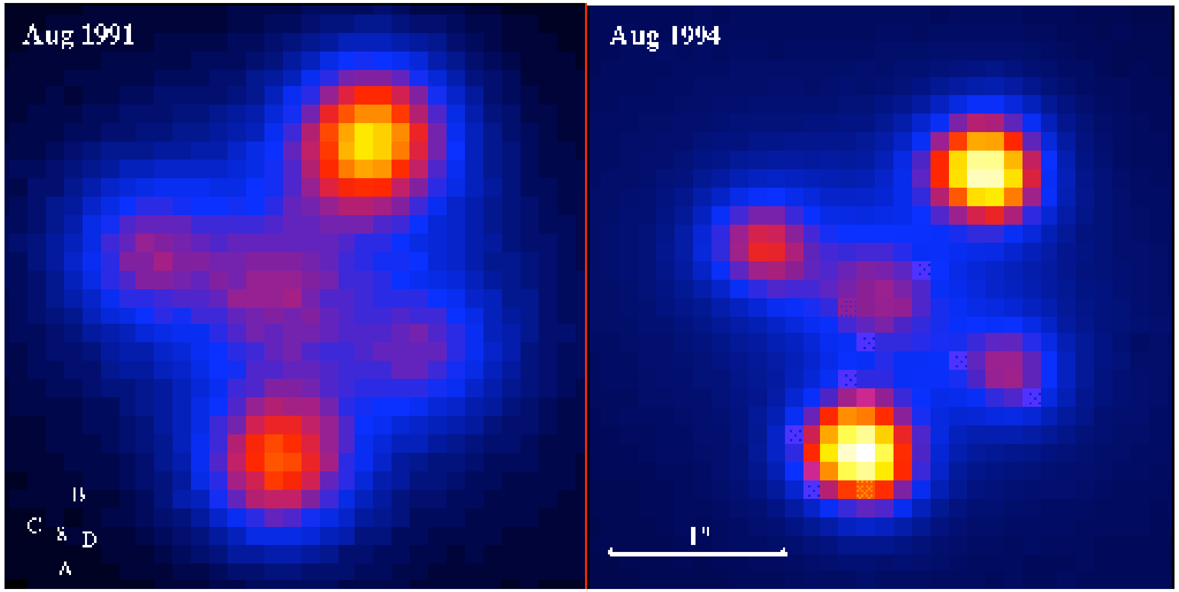
N有限性効果は観測されている

クエーサーマイクロ重力レンズ

レンズ＝銀河（＋星）

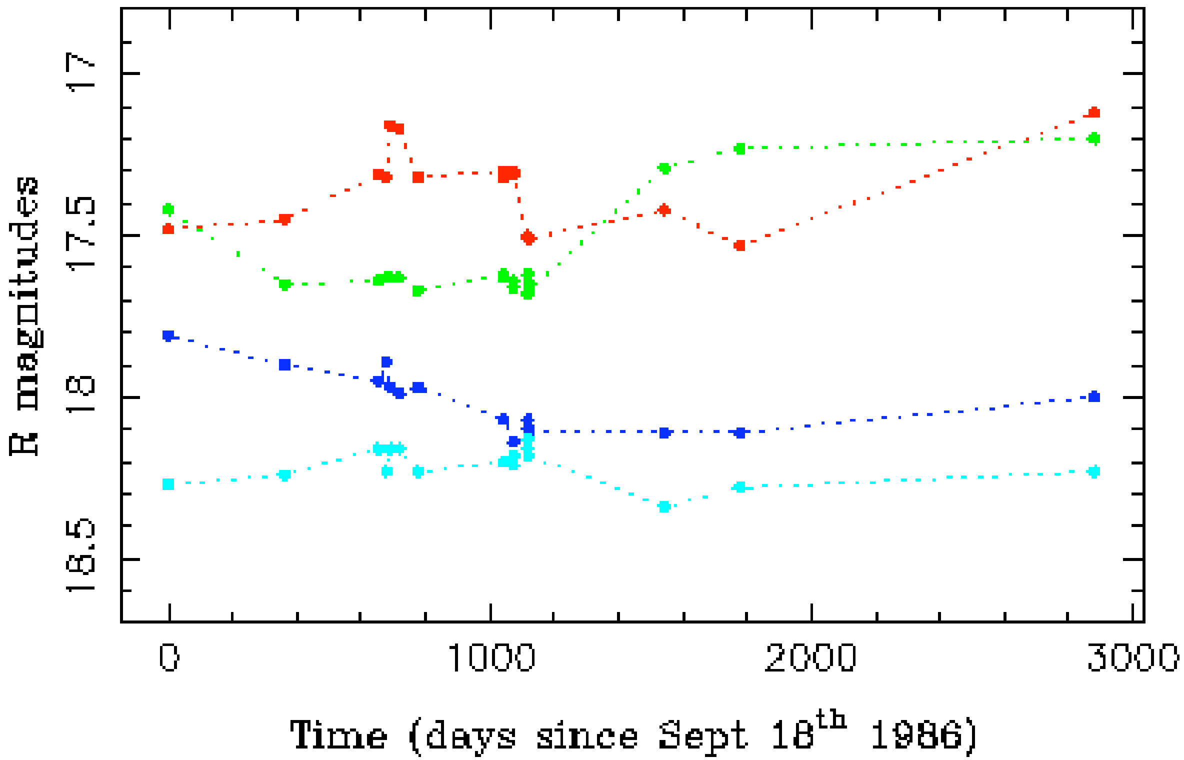
光源＝クエーサー

Q2237+0305
= Einstein Cross



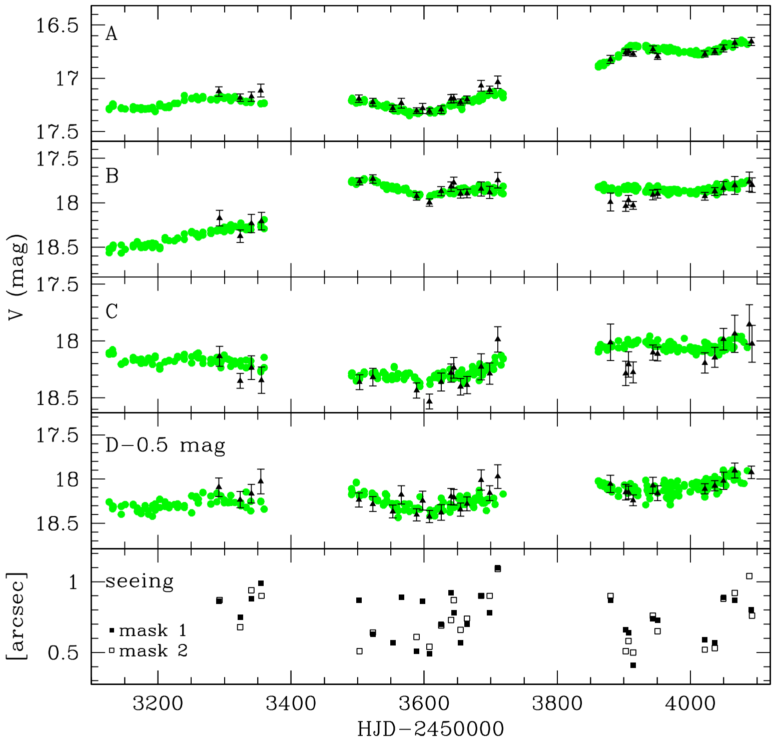
Wambsganss, LRR (91)

Time Variability



Wambsganss, LRR (91)

Q2237+0305
= Einstein Cross
Time Variability



Eigenbrod et al.
ArXiv:0709.2828

疑問（その2）

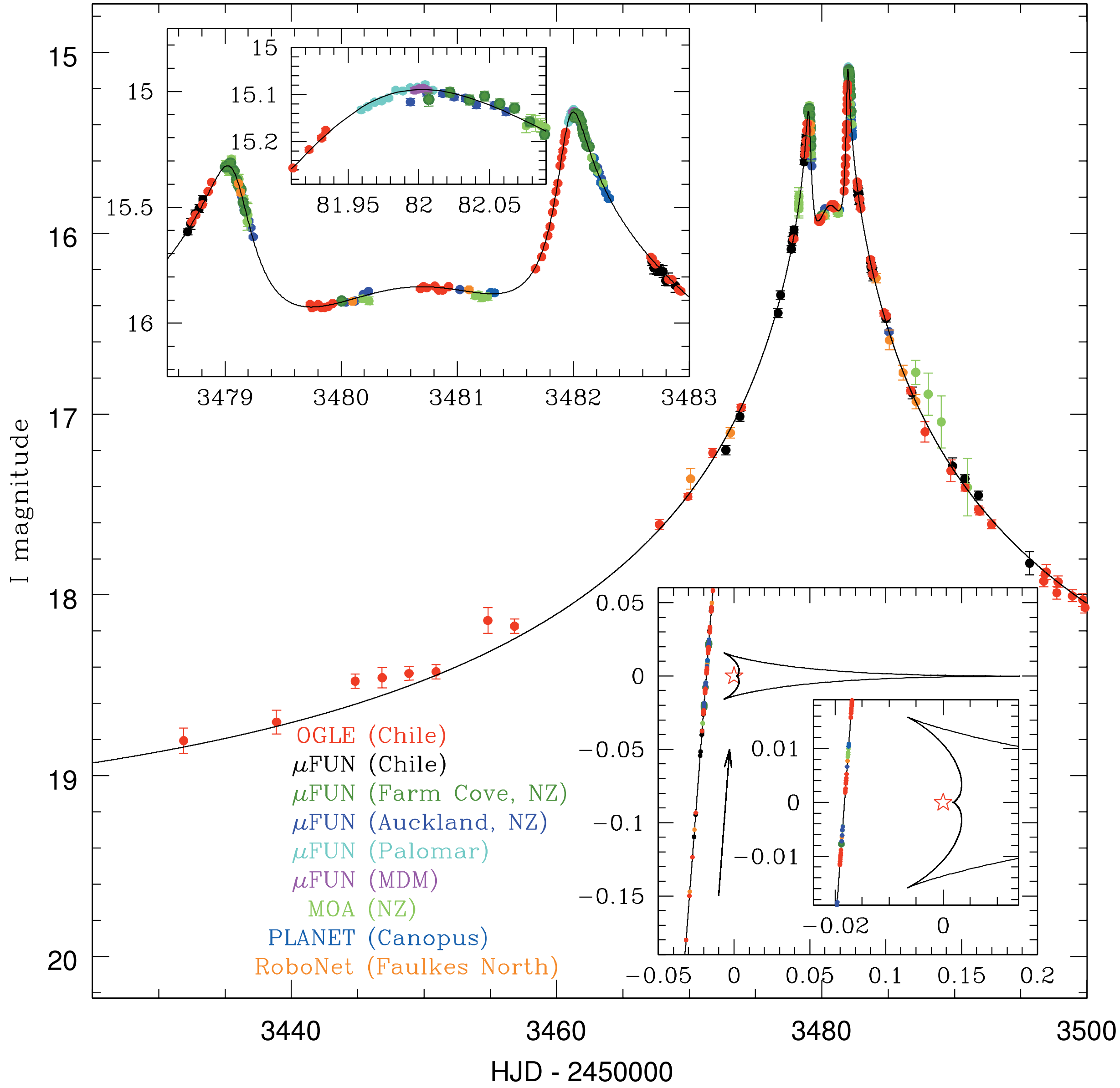
そもそも

質点系のレンズ方程式の解

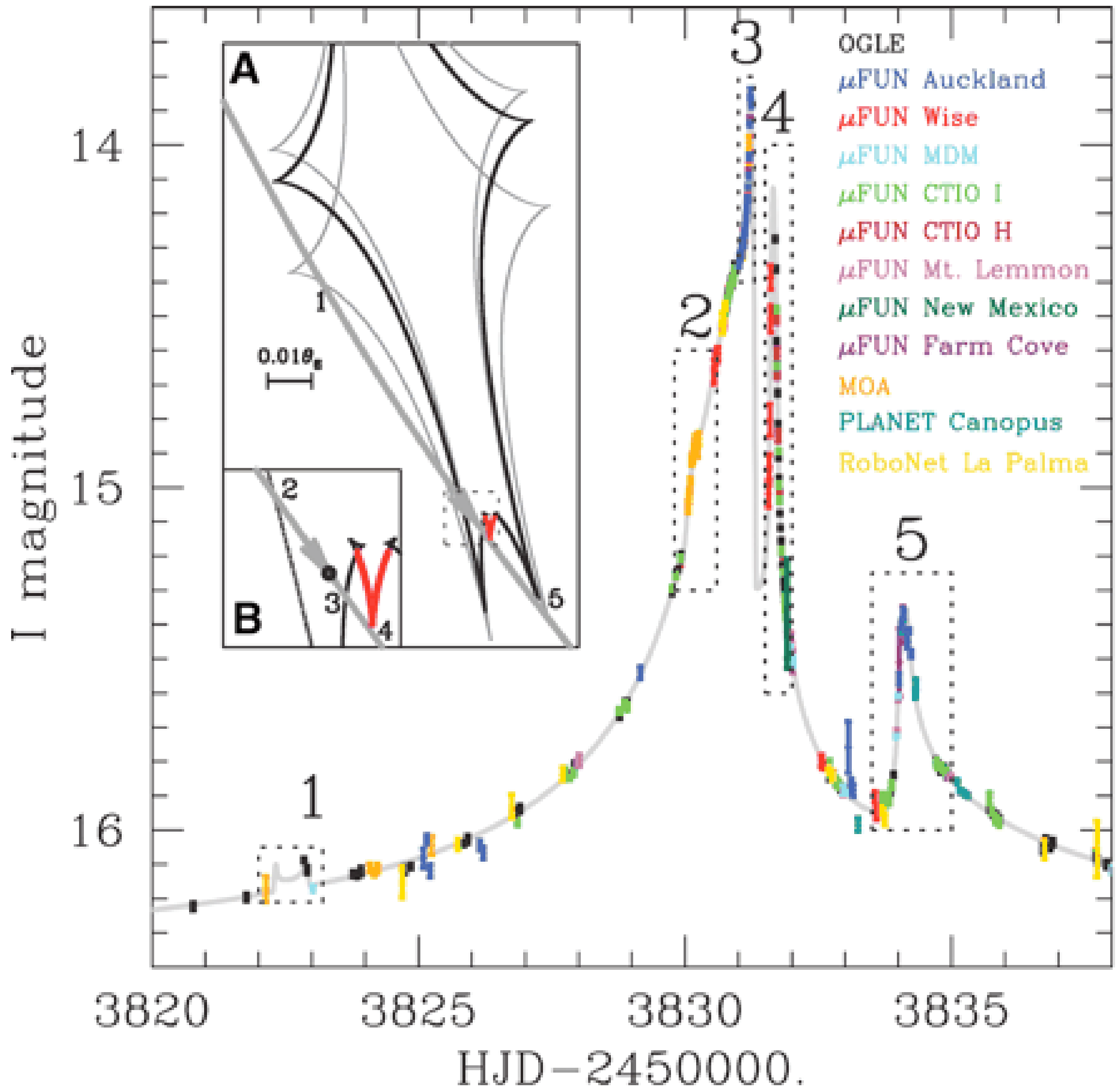
＝像の位置

が得られないか？

（解析的な表式）



Udalski et al. ApJL (04)



Gaudi et al. Science (08)

困難

１体は２次方程式

２体でさえ解けない

複素5次方程式 (Witt 90)

実5次方程式

(Asada 02, Asada et al 04)

ガロアの定理

５次以上の代数方程式
は代数的方法では解けない

代数的方法＝四則演算とべき根

解の公式が知られていない

方針

厳密解はあきらめる

代わりに

摂動解を追求する

観測誤差があるので

近似解で実用上は十分

§2. 複素変数の定式化

Bourassa and Kantowski (73,75)

重力レンズ （2次元写像）

光源面 ⟷ **レンズ面**

$\vec{\beta}$ $\vec{\theta}$

W=Wx+iWy z=x+iy

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \sum_i^N \nu_i \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{e}_i}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{e}_i|^2}$$

２変数が陽に連立

$$w = z - \sum_i^N \frac{\nu_i}{z^* - \epsilon_i^*}$$

Single-Complex-Variable Polynomial

Witt (90)

Z * を消去して

Z のみの代数方程式

N^2+1次

$$(z-w)\prod_{l=1}^{N}\left((w^*-\epsilon_l^*)\prod_{k=1}^{N}(z-\epsilon_k)+\sum_{k=1}^{N}\nu_k\prod_{j\neq k}^{N}(z-\epsilon_j)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\nu_i\prod_{l=1}^{N}(z-\epsilon_l)$$

$$\times\prod_{m\neq i}^{N}\left((w^*-\epsilon_m^*)\prod_{k=1}^{N}(z-\epsilon_k)+\sum_{k=1}^{N}\nu_k\prod_{j\neq k}^{N}(z-\epsilon_j)\right)$$

摂動

質量比 $\nu_i = M_i/M_{tot}$ **< 1**

を展開パラメタとして逐次計算

$$z = \sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{p_N=0}^{\infty}\nu_2^{p_2}\nu_3^{p_3}\cdots\nu_N^{p_N}z_{(p_2)(p_3)\cdots(p_N)}$$

ゼロ次解

$$\alpha_i \equiv -1/w_i^*$$

$$\alpha_\pm = \frac{w}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{ww^*}}\right)$$

$$\epsilon_i$$

$$w_i = w - \epsilon_i$$

問題点

$$\alpha_i$$

は元のレンズ方程式を満たさ**ない**

見かけの解（非物理的）が混入

多項式の次数　＝ N^2+1次

代数学の基本定理

解の個数　＝ N^2+1個

N質点レンズの像の最大個数

＝ $5(N-1)$

Dual-Complex-Variables Formalism

Ｚ と Ｚ* の共存

利点

元のレンズ方程式と等価

↓

非物理的な見かけの解なし

$$C(z, z^*) = \sum_{k=2}^{N} \nu_k D_k(z^*)$$

展開パラメタνに関して線型

$$D_k(z^*) = \frac{1}{z^*} - \frac{1}{z^* - \epsilon_k^*}$$

逐次解

$$z = \sum_{p_2=0}^{\infty} \sum_{p_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{p_N=0}^{\infty} (\nu_2)^{p_2} (\nu_3)^{p_3} \cdots (\nu_N)^{p_N} z_{(p_2)(p_3)\cdots(p_N)}$$

1次解

$$z_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)} = \frac{b_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)} - a_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)} b^*_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)}}{1 - a_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)} a^*_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)}}$$

$$a_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)} = \frac{1}{\left(z^*_{(0)\cdots(0)}\right)^2}$$

$$b_{(0)\cdots(1_k)\cdots(0)} = \frac{\epsilon^*_k}{z^*_{(0)\cdots(0)}\left(z^*_{(0)\cdots(0)} - \epsilon^*_k\right)}$$

2次解

$$z_{(0)\cdots(2_k)\cdots(0)} = \frac{b_{(0)\cdots(2_k)\cdots(0)} - a_{(0)\cdots(2_k)\cdots(0)} b^*_{(0)\cdots(2_k)\cdots(0)}}{1 - a_{(0)\cdots(2_k)\cdots(0)} a^*_{(0)\cdots(2_k)\cdots(0)}}$$

$$z_{(0)\cdots(1_k)\cdots(1_l)\cdots(0)}$$
$$= \frac{b_{(0)\cdots(1_k)\cdots(1_l)\cdots(0)} - a_{(0)\cdots(1_k)\cdots(1_l)\cdots(0)} b^*_{(0)\cdots(1_k)\cdots(1_l)\cdots(0)}}{1 - a_{(0)\cdots(1_k)\cdots(1_l)\cdots(0)} a^*_{(0)\cdots(1_k)\cdots(1_l)\cdots(0)}}$$

3次解、４次解、・・

も同様

§3. まとめ

HA, in prep. (08)

初のN体レンズの手計算

摂動論　　**逐次解を構成**

× **Single-Complex-Variable Polynomial**

○ **Dual-Complex-Variables Formalism**

今後

1　離散性(有限N)に着目した応用

予測
特異な増光現象
統計的性質（平均、分散等）

2　多重レンズ面への一般化

↓

宇宙論的重力レンズへの応用