解析力学期末試験（横山）

2016 年 11 月 14 日実施
http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/AM2016.html

実施要項と注意事項

1. 本紙は試験開始の合図があるまで裏返してはならない。
2. 配布物は、問題用紙 (この紙)1 枚、解答用紙 2 枚 (追加不可)、計算用紙 1 枚、アンケート 2 種類である。
3. 提出物は、解答用紙 2 枚 (両面使用)、アンケート 2 種類である。
4. 各解答用紙ならびに参照資料には、学籍番号・氏名等の所要事項と共に、連絡の取りやすいメールアドレスを明記すること。（採点上必要が生じた場合には、連絡の上、説明を求めます。）
5. 計算の必要な問題については、結果だけでなく、解答用紙の紙幅内で、途中経過を目で追える程度に詳細に書くこと。
6. 資料等の参照は一切不可。
7. 試験室内での通信機器・電子機器の使用は、他の迷惑となるので、禁止とする。
8. 解答できない問題は、各自適宜問題を変更して再定義した上で解答すること。 その際、どのような状況設定のもとで解いたか明示すること。
9. 試験時間は 90 分であるが、アンケートの記入時間と合わせて 18:50 までにはすべて提出を終え、退出すること。

以上

試験問題は裏面に記載

問　　題

I　一般化座標 q、一般化運動量 p によって記述される力学系のしたがうハミルトンの正準方程式を、作用から出発して変分法によって導出してみよ。

II　ヘビサイド単位系で、真空を媒質とするマクスウェル方程式を書き下すと

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t), \qquad \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),$$

となる。すなわち、SI 単位系の式で $\epsilon_0,\ \mu_0 \longrightarrow 1,\ t \longrightarrow ct$ と置き換えればよい。最後の式で電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ の分母にも c がかかっているのは、$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ が電子の速度 (座標の時間微分) に比例するからである。以下この単位系を用いて解答せよ。

(1) 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が同じ次元を持つことを説明せよ。

(2) ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$、スカラーポテンシャル ϕ を用いたラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\phi(\boldsymbol{r},t) + \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r} = (x,y,z)$$

から得られるオイラーラグランジュ方程式は、質量 m、電荷 e の荷電粒子の電磁場中における運動方程式を正しく与えることを示せ。

(3) 上記のラグランジアンからハミルトニアンを構成してみよ。

III　正準変数 (q,p) から (Q,P) への正準変換について以下の問いに答えよ。

(1) 母関数 $W(q,P) = qP$ が生成する正準変換は恒等変換であることを示せ。

(2) 無限小正準変換を ϵ を微小量として $W(q,P) = qP + \epsilon S(q,P)$ によって定義する。このとき、(Q,P) を (q,p) によって ϵ の一次まで で表せ。

(3) 関数 $F(X,Y)$ に対して、$\delta F(q,p) \equiv F(Q,P) - F(q,p)$ と定義すると、ポアソン括弧式を用いて、ϵ の一次までで $\delta F(q,p) = \epsilon\{F,S\}$ と表せることを示せ。

(4) S としてハミルトニアンを採用したとき、(Q,P) は (q,p) の時間発展を与えることを示せ。

IV　微分方程式

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\boldsymbol{r})\psi$$

の解を $\psi = e^{iS/\hbar}$ とおいたとき、この微分方程式は $\hbar$ の最低次で S に対するハミルトンヤコビ方程式に帰着することを示せ。

V　3 次元空間で中心力ポテンシャル $V(r)$ の下で運動する質量 m の粒子について、ラグランジアンからハミルトニアンを求め、正準方程式を書いてみよ。循環座標となるのは何か。

VI

以上