§A　補遺　剛体の運動

§A1　剛体

剛体:　形状と大きさが不変に保たれる有限の大きさを持った物体。力学的自由度としては、剛体上にとったある点の並進運動とそのまわりの回転の 6 自由度によって指定される。回転の自由度は、回転軸を決めるのに 2 つ、そのまわりの回転角を指定するのにもう 1 つ。

無限個の質点の集積と見なし、角質点間の距離が常に一定不変に保たれていると考えれば良い。(一般相対論には剛体は存在しない。)

剛体上に固定された座標系 O-xyz の運動を決めれば良い。O の位置ベクトルを

O を通る軸の周りの回転の角速度ベクトルを　　とし、剛体を構成する i 番目の質点の O-xyz 座標系での位置ベクトルを　　とすると、その質点の速度ベクトルは

(A1)　と表され、

運動エネルギーは

(A2)

Oを重心にとれば、

(A3)

となって、全運動エネルギーは重心の並進運動エネルギーとそのまわりの回転のエネルギーの総和で表される。

(A4)

を用い、角速度ベクトルの成分を　　と書くと

(A5)

但し

(A6)　と書ける。

これを<u>慣性モーメントテンソル</u>という。

　これは対称行列なので、直交行列によって対角化できる。つまり、剛体上に適切な直交座標系をとると、慣性モーメントテンソルは対角成分しか持たないようにできる。これを主慣性モーメントという。

角速度ベクトルを、角度変数　によって

（A７）　と表すと、

(A8)　と書ける。

Ｕは並進及び回転運動双方に関するポテンシャルである。

オイラー・ラグランジュ方程式をかくと、以下のようになる。

(A9)

(A10)

さて、質点ｉの角運動量　は　と与えられるので

(A1)の回転運動の速度に注目すると、剛体の全角運動量は

(A5)

で与えられる。但しベクトル公式

を用いた。（この公式の証明は電磁気学で行ったはずであるが、不安な人は拙著「電磁気学」（講談社）215 ページ(II.41)を見て下さい。）

　これは　(A6）と書ける。

つまり、　(A7)　が成り立つ。

一方、　については、δt 時間内の回転にともなう質点 i の微小変位が

(A8)

と書けることに注目すると、ポテンシャルエネルギーの変化は受ける仕事なので

(A9)

と書けるので、

(A10)　となり、

全力のモーメントつまりトルクにより、オイラー・ラグランジュ方程式(A10)は

(A17)　　とかける。

§Ａ２　基底ベクトルによるベクトルの展開

簡単のためしばらく２次元平面上で考える。平面上のベクトル　　は

と成分表示できるが、これは　　　　　　　　　　　という基底ベクトル

によって　　　　　　　　　　　　(A18)　と展開されたものの成分表示にほかならない。これは１行１列行列として

(A19)　と表すこともできる。

これをϕだけ回転した基底　　　　　　で展開した時、

展開係数　　は

(A20)　と書ける。

回転の一次変換の公式から、

(A21) となる。

但し、　　　　はｚ軸まわりに基底をϕだけ回転した時に、座標が受ける変換の変換行列である。

このとき、ベクトル　　自体は、ある幾何学的な点を表す量なので、不変であることに注意すること。(基底を変えると、すなわち座標変換をすると、係数は変わる。)

より　　　　　　　　　　　　　　　　(A22)

あるいは　　　　　　　　　　　　　　(A23)　が成り立つ。

ϕが時間の関数であって、したがって基底ベクトル　　　　　　　も時間変化する時

(A24)　が成り立つ。

これは、　(A25)　と表せる。

§A３　オイラー角

以上の考察をもとに、変化する回転軸のまわりの回転運動の記述に便利なオイラー角を導入する。回転軸の方向を極座標の角度座標　　　　　　　で定め、そのまわりの回転角ψで回転運動を表すことにする。

こうした回転する剛体上に固定された基底ベクトルを次の三段階で決めることにする。そこに現れる角度がオイラー角にほかならない。

まず、ｚ軸まわりにϕだけ回す。(A23)と同様に、

(A26)

次にｙ’軸まわりにθだけ回す。

(A27)

これによって、新たなz’’軸が所期の回転軸方向になる。

剛体は、この z’’軸まわりにψ回るような回転運動をしていると考えているので、剛体上に固定された基底ベクトルは、さらにz’’軸まわりにψ回され、結局剛体上に固定された基底ベクトルは

(A28)　を満たす。

すなわち、　(A29)

角速度ベクトル　　を導入して、

(A33)　　と書いたとき、

(A34)　　とおくと、各成分は

(A35)　となる。

§A４　コマの運動