General Relativity homework No.9

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 6 月 13 日

1 A sample answer

(i) 4 次元時空において，第 0 成分だけを持つあるベクトル：

$$A^{\mu} = (A, 0, 0, 0) \tag{1.1}$$

を考える．Schwarzschild 時空：

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \frac{1}{1 - r_g/r}, r^2, r^2 \sin^2\theta\right) \tag{1.2}$$

は，時間座標 t を含んでいない．したがって，A^{μ} だけずらした世界点 $x^{\mu} \to x^{\mu} + A^{\mu}$ でも計量は不変なはずである．ゆえに，この移動について

$$\delta g_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} + A_{\nu;\mu} = 0 \tag{1.3}$$

であり，A^{μ} は Schwarzschild 時空の Killing ベクトルである．

(ii) Killing 方程式 $\xi_{\mu;\alpha} + \xi_{\alpha;\mu} = 0$ の両辺を共変微分した式

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} + \xi_{\alpha;\mu\beta} = 0 \tag{1.4}$$

を考える．添字を $\alpha \leftrightarrow \beta$，$\beta \leftrightarrow \mu$ と入れ替えたものも同様に Killing 方程式であり

$$(\xi_{\mu;\alpha\beta} + \xi_{\alpha;\mu\beta}) + (\xi_{\mu;\beta\alpha} + \xi_{\beta;\mu\alpha}) - (\xi_{\beta;\alpha\mu} + \xi_{\alpha;\beta\mu}) = 0 + 0 - 0 = 0. \tag{1.5}$$

これより

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu;\alpha\beta} + \xi_{\mu;\beta\alpha} &= \underbrace{(\xi_{\alpha;\beta\mu} - \xi_{\alpha;\mu\beta})}_{\xi^{\gamma}R_{\alpha\gamma\mu\beta}} + \underbrace{(\xi_{\beta;\alpha\mu} - \xi_{\beta;\mu\alpha})}_{\xi^{\gamma}R_{\beta\gamma\mu\alpha}} \\
&= \xi^{\gamma}R_{\gamma\alpha\beta\mu} + \xi^{\gamma}R_{\gamma\beta\alpha\mu}.
\end{aligned}$$

ここで Riemann テンソルの添字に関する対称性を用いた．これより

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} - \xi^{\gamma}R_{\gamma\beta\alpha\mu} = -(\xi_{\mu;\beta\alpha} - \xi^{\gamma}R_{\gamma\alpha\beta\mu}). \tag{1.6}$$

ところで

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} - \xi_{\mu;\beta\alpha} = \xi^{\gamma}R_{\mu\gamma\beta\alpha} \tag{1.7}$$

と

$$R_{\mu\gamma\beta\alpha} + R_{\mu\beta\alpha\gamma} + R_{\mu\alpha\gamma\beta} = 0 \tag{1.8}$$

から

$$\begin{aligned}\xi_{\mu;\alpha\beta} &= \xi_{\mu;\beta\alpha} + \xi^{\gamma} R_{mu\gamma\beta\alpha} \\ &= \xi_{\mu;\beta\alpha} + \xi^{\gamma}(R_{\mu\alpha\beta\gamma} - R_{\mu\beta\alpha\gamma}).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} - \xi^{\gamma} \underbrace{R_{\mu\alpha\beta\gamma}}_{R_{\gamma\beta\alpha\mu}} = \xi_{\mu;\beta\alpha} - \xi^{\gamma} \underbrace{R_{\mu\beta\alpha\gamma}}_{R_{\gamma\alpha\beta\mu}}. \tag{1.9}$$

(1.6) 式と (1.9) より

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} - \xi^{\gamma} R_{\gamma\beta\alpha\mu} = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \xi_{\mu;\alpha\beta} = \xi^{\gamma} R_{\gamma\beta\alpha\mu}. \tag{1.10}$$

(iii) 計算すると

$$\begin{aligned}J^{\mu}{}_{;\mu} &= (T^{\mu\nu}\xi_{\nu})_{;\mu} \\ &= \underbrace{T^{\mu\nu}{}_{;\mu}}_{0}\xi_{\nu} + T^{\mu\nu}\xi_{\nu;\mu} \\ &= T^{\mu\nu}\xi_{\nu;\mu} \\ &= T^{\nu\mu}\xi_{\mu;\nu} \\ &= -T^{\mu\nu}\xi_{\nu;\mu}.\end{aligned}$$

2 行目ではエネルギー・運動量テンソル（EMT）に対する保存則 $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ を用いた．3 行目から 4 行目への変形では dummy の添え字を入れ替えた．4 行目から 5 行目への変形では Killing 方程式を用いた．3 行目と 5 行目より

$$J^{\mu}{}_{;\mu} = 0 \tag{1.11}$$

が示される．

(iv) 次の 3 つのベクトル[*1]

$$\xi_{(1)} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad \xi_{(2)} = -\sin\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad \xi_{(3)} = 0\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + 1\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{1.12}$$

は Killing 方程式

$$0 = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - 2\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\xi_{\lambda} \tag{1.13}$$

を満たし, 2 次元単位球面が持つ 3 次元回転の対称性 $SO(3)$ の 3 つの生成子に対応する．これは

$$[\xi_{(i)}, \xi_{(j)}] = \epsilon^{ijk}\xi_{(k)} \tag{1.14}$$

を確認することで分かる (この ϵ はテンソルではないことに注意).

コメント

時空の対称性を特徴づける Killing ベクトルについて扱いました．重要な点は (iii) で見たように, Killing ベクトルからそれに付随した保存カレントと保存量が定義できるということです．例えば, (i) で出てきた $\frac{\partial}{\partial t}$(時間に関する並進対称性を担う Killing ベクトル) は粒子のエネルギー, $\frac{\partial}{\partial\phi}$(軸対称性を担う Killing ベクトル) は角運動量の保存をそれぞれ与えることが分かります.

[*1] n 次元において独立な Killing ベクトルは高々 $n(n+1)/2$ 本という定理があるので，これら 3 本で尽きている．特に，いまはちょうど 3 本あり，このような時空を最大対称時空と呼ぶ．

2 A sample answer

(i)

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{\nu(r)}(c\mathrm{d}t)^2 + e^{\lambda(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2); \tag{2.1}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{\nu} & & & \\ & e^{\lambda} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

完全流体で静的なので $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ なので

$$T_{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_0 u_0 + p g_{00} = \rho e^{\nu} c^2. \tag{2.3}$$

ここに $-c^2 = u^\mu u_\nu = g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = g^{00} u_0 u_0 = -(1/e^\nu) u_0 u_0$ より $u_0 u_0 = e^\nu c^2$ であることを用いた．
次に，Einstein 方程式の 00 成分：

$$G_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \tag{2.4}$$

について，G_{00} はその 8 I で $\alpha = \nu/2, \beta = \lambda/2$ と置くことにより

$$G_{00} = G_{tt} = \frac{\lambda'}{r} e^{\nu-\lambda} + \frac{1}{r^2} e^{\nu} - \frac{1}{r^2} e^{\nu-\lambda}.$$

これと上で示した $T_{00} = \rho e^\nu c^2$ を (2.4) 式に代入すると

$$\frac{\lambda'}{r} e^{-\lambda} + \frac{1 - e^{-\lambda}}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2$$

を得る．両辺に r^2 を掛けて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r(1 - e^{-\lambda})] = r\lambda' e^{-\lambda} + (1 - e^{-\lambda})$$

を用いると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r(1 - e^{-\lambda})] = \frac{2G}{c^2} \rho(r) 4\pi r^2 \tag{2.5}$$

を得る．両辺を積分して

$$\int_0^r \mathrm{d}\tilde{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{r}}[\tilde{r}(1 - e^{-\lambda(\tilde{r})})] = \frac{2G}{c^2} \underbrace{\int_0^r \mathrm{d}\tilde{r} \rho(\tilde{r}) 4\pi \tilde{r}^2}_{M(r)}.$$

ゆえに

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}. \tag{2.6}$$

(ii) 固有質量

$$M_p(r) = \int_0^r \mathrm{d}\tilde{r} \rho(\tilde{r}) 4\pi e^{\lambda(\tilde{r})/2} \tilde{r}^2 \tag{2.7}$$

と，前問で導入した重力質量

$$M(r) = \int_0^r \mathrm{d}\tilde{r} \rho(\tilde{r}) 4\pi \tilde{r}^2 \tag{2.8}$$

の差を考えると

$$M(r) - M_p(r) = \int_0^r \mathrm{d}\tilde{r}[1 - e^{\lambda(\tilde{r})/2}]\rho(\tilde{r})4\pi\tilde{r}^2.$$

いま前問より

$$1 - e^{\lambda(r)/2} = 1 - \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1/2} \simeq -\frac{GM(r)}{c^2 r}$$

と近似して

$$[M(r) - M_p(r)]c^2 \simeq \int_0^r \underset{\sim}{\mathrm{d}\tilde{r}}\left(-\frac{GM(r)}{r}\right)\underset{\sim\sim\sim\sim}{\rho(\tilde{r})4\pi\tilde{r}^2}. \tag{2.9}$$

ここで波線部 $= \rho\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}m$ より，右辺は全（重力）結合エネルギーと解釈できる．ゆえに重力質量 $M(r)$ とは，固有質量 $M_p(r)$ に加えて，天体の構成要素が持つ重力エネルギーまで考慮したものと解釈できる．

3 A sample answer

屈折角 α は講義の結果を使うと

$$\alpha = \underbrace{\frac{4GM}{c^2 b}}_{\text{イ}} \tag{3.1}$$

だった．一方，問題にある図を見ると

$$\mathrm{IS} = 2 \times d_{\mathrm{LS}} \tan(\alpha/2) \simeq d_{\mathrm{LS}} \times \alpha, \tag{3.2}$$
$$\mathrm{IS} = d_{\mathrm{S}} \tan\theta - d_{\mathrm{S}} \tan\phi \simeq d_{\mathrm{S}}(\theta - \phi) \tag{3.3}$$

と表せる．つまり

$$\mathrm{IS} = \underbrace{d_{\mathrm{LS}}}_{\text{ロ}}\,\alpha = d_{\mathrm{S}}\,\underbrace{(\theta - \phi)}_{\text{ハ}}. \tag{3.4}$$

また

$$b = d_{\mathrm{L}} \tan\theta \simeq \underbrace{d_{\mathrm{L}}}_{\text{ニ}}\,\theta. \tag{3.5}$$

これらより

$$d_{\mathrm{LS}}\alpha = d_{\mathrm{S}}(\theta - \phi), \qquad d_{\mathrm{L}}\theta = b. \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= \theta - \frac{d_{\mathrm{LS}}}{d_{\mathrm{S}}}\alpha \\
&= \theta - \frac{1}{\theta} \cdot \theta \cdot \frac{d_{\mathrm{LS}}}{d_{\mathrm{S}}} \cdot \alpha \\
&= \theta - \frac{1}{\theta} \cdot \frac{b}{d_{\mathrm{L}}} \cdot \frac{d_{\mathrm{LS}}}{d_{\mathrm{S}}} \cdot \alpha \\
&= \theta - \frac{\alpha_0^2}{\theta}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

とすると，$d_{\mathrm{LS}} = d_{\mathrm{L}} - d_{\mathrm{S}}$ も用いて

$$\alpha_0^2 = b\alpha \cdot \frac{d_{\mathrm{LS}}}{d_{\mathrm{L}} d_{\mathrm{S}}} = \underbrace{b\alpha\left(\frac{1}{d_{\mathrm{S}}} - \frac{1}{d_{\mathrm{L}}}\right)}_{\text{ホ}}. \tag{3.8}$$

(i) (3.7) 式を θ について解くと

$$\theta = \frac{\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}}{2}. \tag{3.9}$$

特に $\phi = 0$，つまり O，L，S（観測者，重力源，星）が一直線上にあるときを考えると

$$\theta = \pm\alpha_0$$

だから，見かけの像 I は，問題文の図で S の上下等距離の位置に見えることになる．実際は 3 次元的だから，S の周りに円環が見える（Einstein リング）．$\phi = 0$ でなくても，図で，見かけの像 I はふたつ生じる．

(ii) O から角度 ξ 方向を見るとき，$\xi \sim \xi + \mathrm{d}\xi$，および $\zeta \sim \zeta + \mathrm{d}\zeta$ が見込む立体角は

$$\frac{D^2 \sin\xi \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\zeta}{D^2} \simeq \xi \, \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta$$

である．ただし $|\xi| \ll 1$ とした．よって増光率

$$R = \frac{\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\zeta}{\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\zeta} = \frac{\theta}{\phi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}. \tag{3.10}$$

ここで (i) の結果から

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}}{\phi}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha_0}{\phi}\right)^2}\right)\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{1 + (2\alpha_0/\phi)^2}}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

ただし複号同順.