

一般相対論演習その9 (横山)

2022年6月7日配布・6月13日提出締切・14日解答公開予定

<http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html>

- I キリングベクトル 講義 §3.7で述べたように、各時空点の計量 $g_{\mu\nu}$ を座標 ξ^μ だけズレた点における計量で置き換えるような変分を取ると、計量は $\delta g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$ だけ変化する。逆に言うと、

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad (1)$$

を満たすようなベクトル $\xi^\mu(x)$ だけずらしても時空の計量は変化せず、したがって、そのような時空は $\xi^\mu(x)$ で特徴付けられる対称性を持っていることになる。このようなベクトルをキリングベクトル、(1)をキリング方程式という。これについて以下の問いに答えよ。

- (i) 第零成分だけを持つベクトルはシュバルツシルト時空のキリングベクトルになっていることを示せ。
(ii) 以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} = \xi^\gamma R_{\gamma\beta\alpha\mu}.$$

- (iii) エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に対し、 $J^\mu \equiv T^{\mu\nu}\xi_\nu$ は保存すること、すなわち $J^\mu{}_{;\mu} = 0$ が成り立つことを示せ。
(iv) 2次元単位球面の計量 $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ に対する独立なキリングベクトルを全て求め、その意味を論ぜよ。

- II 完全流体 $T_{\mu\nu} = (\rho + P/c^2)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$, ($u^\mu u_\mu = -c^2$) からなる静的球対称な天体の外部時空はシュバルツシルト計量で表されるが、その天体の質量とシュバルツシルト計量の質量パラメタとの関係を調べよう。

- (i) 計量を

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}(cdt)^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2) \quad (2)$$

のように取る。このとき $T_{00} = \rho(r)c^2 e^{\nu(r)}$ と書けることを示し、アインシュタイン方程式の00成分を $\lambda(r)$ について解くことにより、

$$e^{\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad M(r) \equiv \int_0^r \rho(r) \times 4\pi r^2 dr \quad (3)$$

が成り立つことを示せ。 $M(r)$ を重力質量という。これを星の表面 r_* まで求めればよいのである。

- (ii) 密度を空間の固有体積要素 ($\sqrt{\det g_{ij}}$ の掛かったもの) で積分することによって得られる固有質量

$$M_p(r) \equiv \int_0^r \rho(r) \times 4\pi e^{\lambda(r)/2} r^2 dr$$

と重力質量の差をニュートン (弱重力) 極限で考察することにより、重力質量の物理的意味を説明せよ。

III 重力レンズ 以下の空欄を埋めながら説明を読んで問に答えよ。

図1のように質量 M の質点から成るレンズ天体 L による重力レンズ現象を考察する。光源と観測者は共にレンズ天体から十分に離れており、 $d_L \gg b$, $d_{LS} \gg b$ が成り立ち、光の屈折はレンズ天体近くの点 D で瞬間的に起こるものと近似しよう。屈折角 α は十分小さく、講義 で述べたように、 $\alpha =$ イ と表すことができる。図に現れる角度はいずれも微小であるとし、 DL も IS も光線に近似的に垂直であると考え、 $IS =$ ロ $\alpha = d_S$ ハ , 及び $b =$ ニ θ という式が成り立つので、これらより、

$$\phi = \theta - \frac{\alpha_0^2}{\theta}, \quad \alpha_0^2 \equiv$$

ホ

(4)

という式が成り立つ。これを**レンズ方程式**, α_0 を**アインシュタインリング半径**という。

- (i) (4) を θ について解き、 ϕ のさまざまな値に対してその意味を論ぜよ。
- (ii) $\phi \neq 0$ のとき、増光率を求めよ。ただし増光率は、レンズ天体があるときに観測者が見込む像 I (一つとは限らない) の (無限小) 立体角と、レンズ天体がないときに観測者が見込む光源の (無限小) 立体角の比で与えられる。

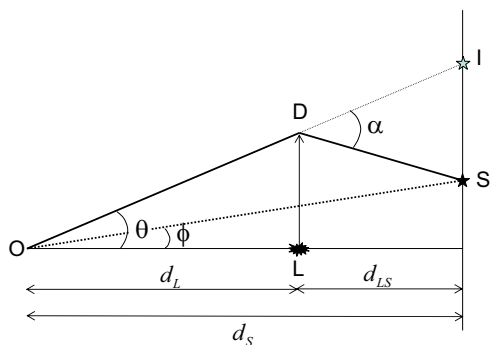


Figure 1: 光源を S 、レンズ天体を L 、観測者を O とし、観測者から見える光源の見かけの位置を I とする。光は太線 SDO を進むものとし、レンズ天体に対する衝突径数 DL の長さを b とする。