

General Relativity homework No.8

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 6 月 6 日

0 第 6 回演習の振り返り

0.1 I について

この問題で差がついていました. Lorentz 因子 γ のところが $1/\gamma$ となっているとなっていたものが結構な数ありました. 適宜, 極限をとるなどして確認して計算を進めるといいと思います. 間違えてしまった方は, 院試対策も兼ねて, 特殊相対論の演習として復習すると良いと思います.

0.2 II, III について

この問題は第 5 回演習の III に関連した問いでした. 多くの方が正答でした. 一方で, III まで完璧に解いているひとは少なかったですが, 取り組んでいる人はきちんと正答まで行き着いていました. 素晴らしいです.

1 A sample answer

その 7 V で扱った時空

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + e^{2\gamma} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

で

$$e^{2\gamma} = r^2; \quad \gamma = \log r, \quad \gamma' = \frac{1}{r}, \quad \gamma'' = -\frac{1}{r^2} \quad (1.2)$$

と置けば

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.3)$$

となる. この時空に対する Einstein テンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

を求めることを考える. そのために $R_{\mu\nu}$ および R を求めなければならないが, これらは (1.1) 式で表されているもっと一般の時空について求めておくことにする. そして最後に (1.2) 式を採用して目的の $G_{\mu\nu}$ を求める.

もし $R^\mu_{\nu\rho\sigma} = 0$ だと $R_{\mu\nu} = R = 0$ となって $G_{\mu\nu} = 0$ だから, $G_{\mu\nu} = 0$ のうち 0 でない可能性のある成分を求めるためには $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ の 0 でない成分を調べればよい. 計量 (1.1) に対して $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ のうち 0 でない成

分は、その 7 V より

$$\begin{aligned} R^t_{tr}, \quad R^t_{t\theta}, \quad R^t_{t\phi}, \quad R^t_{\phi t}, \quad R^t_{\phi r}; \\ R^r_{t\theta}, \quad R^r_{t\phi}, \quad R^r_{\phi t}, \quad R^r_{\phi r}; \quad R^\theta_{\phi\phi} \end{aligned}$$

であった（もちろん、これらの添字を適当に入れ替えたものも考えられる）。これらの具体的な表式はその 7 V で既に求められている。さて、まず $R_{\mu\nu}$ について

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \\ &= R^t_{\mu t\nu} + R^r_{\mu r\nu} + R^\theta_{\mu\theta\nu} + R^\phi_{\mu\phi\nu} \end{aligned}$$

であるから、上に列挙した $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ を直で使えるように変形しながら各成分を求めると

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \underbrace{R^t_{ttt}}_0 + R^r_{trt} + R^\theta_{t\theta t} + R^\phi_{t\phi t} \\ &= g^{r\alpha} R_{\alpha trt} + g^{\theta\alpha} R_{\alpha t\theta t} + g^{\phi\alpha} R_{\alpha t\phi t} \\ &= g^{rr} R_{rtrt} + g^{\theta\theta} R_{\theta t\theta t} + g^{\phi\phi} R_{\phi t\phi t} \\ &= g^{rr} R_{trtr} + g^{\theta\theta} R_{t\theta t\theta} + g^{\phi\phi} R_{t\phi t\phi} \\ &= g^{rr} g_{t\alpha} R^\alpha_{rtr} + g^{\theta\theta} g_{t\alpha} R^\alpha_{\theta t\theta} + g^{\phi\phi} g_{t\alpha} R^\alpha_{\phi t\phi} \\ &= g^{rr} g_{tt} R^t_{rtr} + g^{\theta\theta} g_{tt} R^t_{\theta t\theta} + g^{\phi\phi} g_{tt} R^t_{\phi t\phi}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

ここで 2 番目の等号では $R^\mu_{\nu\lambda\lambda} = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu\lambda\lambda} = -g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu\lambda\lambda} = -R^\mu_{\nu\lambda\lambda}$ より $R^\mu_{\nu\lambda\lambda} = 0$ であることを用いた。また 3 番目の等号では、 $g_{\mu\nu}$ が対角的であること：

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha} & & & \\ & e^{2\beta} & & \\ & & e^{2\gamma} & \\ & & & e^{2\gamma} \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -e^{-2\alpha} & & & \\ & e^{-2\beta} & & \\ & & e^{-2\gamma} & \\ & & & e^{-2\gamma} / \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

を用いた。4 番目の等号では $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の添字に関する対称性 $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\nu\mu\sigma\rho}$ を用いた（その 3 VI）。6 番目の等号は 3 番目の等号と同じである。さて (1.5) 式に (1.6) 式の各成分を代入すると、少し煩雑な計算ののち

$$R_{tt} = [\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta' + 2\alpha'\gamma']e^{2(\alpha-\beta)} - (\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}) - 2(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha}) \quad (1.7)$$

を得る。その他の成分についても同様の計算をすると

$$(R_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R_{tt} & R_{tr} & 0 & 0 \\ R_{rt} & R_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

という結果になり、各成分は

$$R_{tr} = R_{rt} = -2(\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma'), \quad (1.8)$$

$$R_{rr} = -[\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta'] + [(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}) + 2\dot{\beta}\dot{\gamma}]e^{-2(\alpha-\beta)} - 2[\gamma'' + (\gamma')^2 - \gamma'\beta'], \quad (1.9)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + (\ddot{\gamma} + 2\dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha} + \dot{\gamma}\dot{\beta})e^{-2(\alpha-\gamma)} - [\gamma'' + 2(\gamma')^2 + \gamma'\alpha' - \gamma'\beta']e^{-2(\beta-\gamma)}, \quad (1.10)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta + (\ddot{\gamma} + 2\dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha} + \dot{\gamma}\dot{\beta})e^{-2(\alpha-\gamma)} \sin^2 \theta - [\gamma'' + 2(\gamma')^2 + \gamma'\alpha' - \gamma'\beta']e^{-2(\beta-\gamma)} \sin^2 \theta. \quad (1.11)$$

次に (1.6) 式と (1.7) ~ (1.11) 式を用いて、スカラー曲率 R が

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} \\
&= g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \\
&= e^{-2\alpha} [2(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}) + 4\ddot{\gamma} + 6\dot{\gamma}^2 - 4\dot{\gamma}\dot{\alpha} + 4\dot{\gamma}\dot{\beta}] \\
&\quad + e^{-2\beta} \{-2[\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta'] - 4\alpha'\gamma' - [4\gamma'' + 6(\gamma')^2 - 4\gamma'\beta']\} \\
&\quad + 2e^{-2\gamma}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

と求まる．以上で $R_{\mu\nu}$ と R が求まったので、 $G_{\mu\nu}$ を求めることができる． R の表式が長いので、ここで $e^{2\gamma} = r^2$ として計算を行なうことにすると

$$R = 2(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha})e^{-2\alpha} - 2[\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta']e^{-2\beta} - \frac{4\alpha' - 4\beta'}{r}e^{-2\beta} + \frac{2(1 - e^{-2\beta})}{r^2} \tag{1.13}$$

となる． $G_{\mu\nu}$ のうち 0 でない可能性のある成分は

$$G_{tt}, \quad G_{rr}, \quad G_{\theta\theta}, \quad G_{\phi\phi}; \quad G_{tr} = G_{rt}$$

であり、これらを計算すると

$$G_{tt} = \frac{2\beta'}{r}e^{2(\alpha-\beta)} + \frac{1}{r^2}e^{-2\alpha} - \frac{1}{r^2}e^{2(\alpha-\beta)}, \quad G_{rr} = \frac{2\alpha'}{r} + \frac{1 - e^{2\beta}}{r^2}, \tag{1.14}$$

$$G_{\theta\theta} = (\alpha' - \beta')re^{-2\beta} - (\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha})r^2e^{-2\alpha} + [\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta']r^2e^{-2\beta}, \tag{1.15}$$

$$G_{\phi\phi} = (\alpha' - \beta')re^{-2\beta} \sin^2 \theta - (\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha})r^2e^{-2\alpha} \sin^2 \theta + [\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta']r^2e^{-2\beta} \sin^2 \theta; \tag{1.16}$$

$$G_{tr} = G_{rt} = R_{tr} = R_{rt} = -2(\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma') = \frac{2\dot{\beta}}{r}. \tag{1.17}$$

2 A sample answer

Schwarzschild 時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (r_g/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{2.1}$$

は、一般の球対称時空の表式 (1.1) で

$$e^{2\alpha} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2, \quad e^{2\beta} = \frac{1}{1 - (r_g/r)}, \quad e^{2\gamma} = r^2 \tag{2.2}$$

と置いたものであり

$$\alpha' = \frac{1}{2r} \frac{r_g/r}{1 - (r_g/r)}, \quad \beta' = -\frac{1}{2r} \frac{r_g/r}{1 - (r_g/r)}, \quad \gamma' = \frac{1}{r} \tag{2.3}$$

である．まずスカラー曲率 R は 0 である．これは前問の (1.13) 式から直接計算することもできるし、実際にそうやってしまったけれど、真空の Einstein 方程式から明らかであった．とにかく、スカラー曲率 R からは特異点に関する情報を引き出すことができない．そこで、Schwarzschild 時空 (2.1) に対して、0 でない Riemann テンソルを（添字の交換を除いて）全て求めてみると

$$R^t{}_{rtr} = \frac{1}{r^2} \frac{r_g/r}{1 - (r_g/r)}, \quad R^t{}_{\theta t\theta} = -\frac{r_g}{2r}, \quad R^t{}_{\phi t\phi} = -\frac{r_g}{2r} \sin^2 \theta; \tag{2.4}$$

$$R^r_{\theta r \theta} = -\frac{r_g}{2r}, \quad R^r_{\phi r \phi} = -\frac{r_g}{2r} \sin^2 \theta; \quad R^\theta_{\phi \theta \phi} = \frac{r_g}{r} \sin^2 \theta \quad (2.5)$$

である． $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ のうちこれら以外の添字の組み合わせを持つ成分が 0 であることに注意して，次のスカラー量を考えよう

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto R^{trtr} R_{trtr} + R^{t\theta t\theta} R_{t\theta t\theta} + R^{t\phi t\phi} R_{t\phi t\phi} + R^{r\theta r\theta} R_{r\theta r\theta} + R^{r\phi r\phi} R_{r\phi r\phi} + R^{\theta\phi\theta\phi} R_{\theta\phi\theta\phi}. \quad (2.6)$$

右辺の各項を求めると，例えば

$$\begin{aligned} R^{trtr} R_{trtr} &= (g^{r\alpha} g^{t\beta} g^{r\gamma} R^t_{\alpha\beta\gamma})(g_{t\delta} R^\delta_{rtr}) \\ &= g^{rr} g^{tt} g^{rr} g_{tt} R^t_{rtr} R^t_{rtr} \\ &= \frac{r_g^2}{r^6} \end{aligned} \quad (2.7)$$

であり，他の項も同様にして

$$R^{t\theta t\theta} R_{t\theta t\theta} = R^{t\phi t\phi} R_{t\phi t\phi} = R^{r\theta r\theta} R_{r\theta r\theta} = R^{r\phi r\phi} R_{r\phi r\phi} = \frac{r_g^2}{4r^6}, \quad R^{\theta\phi\theta\phi} R_{\theta\phi\theta\phi} = \frac{r_g^2}{r^6} \quad (2.8)$$

と求まるので，結局

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto \frac{r_g^2}{r^6} \quad (2.9)$$

となる．この量を見ると， $r = r_g$ は特異点ではないが $r = 0$ は特異点になっていることが分かる．

なお， $r = r_g$ が見かけ上の（座標系に依存した）特異点であることを示すだけであれば，適当な座標変換（たとえば，Kruskal 座標系や等方座標系への変換）を行えばよい．それらの座標系では $r = r_g$ に対応する点はまだ特異点ではないが， $r = 0$ に対応する点は依然として特異点になっている．

コメント

この問題を通じて，時空特異点というものの実態が掴めてきたのではないのでしょうか．テンソルは幾何学的な量であり，これらの足をすべて潰した量は時空を特徴づけるスカラー場となります（ここで登場した $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ は Kretschmann 不変量と呼ばれる）．したがって，このスカラー量が発散してしまう”点”は物理法則の破綻するマズい場所であり（局所 Lorentz 系が取れない），時空特異点と判断できます．一方で，ある座標では特異的な振る舞いを見せても，違う座標へ移るとその特異性が消えるものもあります．これは単に座標の取り方が悪い（人間が悪い）ことに起因するため，上記と区別して座標特異点と呼ばれます．

3 A sample answer

ニュートンの重力ポテンシャルを決定するポアソン方程式をテンソル方程式に拡張し，アインシュタイン方程式を導出した．その操作が正当であることを確かめるため，計量テンソルのたかだか 2 階微分まで含み，2 階微分係数について線型な 2 階の対象テンソルとして，どのようなものが許されるか，調べよう．

まず，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ はその条件を満たしている．次に，その 1 階微分 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ は 局所慣性 系で全てゼロにできるので，これらからゼロでないテンソル量を作ることはいできない．そもそも， $g_{\mu\nu;\lambda} = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \boxed{0}$ だから，このことは自明である．最後に，2 階微分係数と計量テンソルから代数的に作られるテンソルは，リーマンの曲率テンソルで尽くされることを，以下のように自由度の勘定から示す．すなわち，座標について 3 次の精度の座標変換 $\tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu_{\nu\lambda\sigma} x^\nu x^\lambda x^\sigma + \mathcal{O}(|x|^4)$ を用いて，局所慣性 系近傍における計量テンソル

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + b_{\mu\nu\lambda\sigma}x^\lambda x^\sigma + \mathcal{O}(|x|^3)$ のミンコフスキー計量からのズレを、座標について 2 次の範囲で、できるだけなくす問題を考えてみる。この係数 $b_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は計量テンソルの 2 階微分係数に対応するので、どのように $a_{\nu\lambda\sigma}^\mu$ を選んでも、対応する変換で同時にゼロとならない $b_{\mu\nu\lambda\sigma}$ の独立な成分の数が、計量テンソルの 2 階微分から代数的に構成できるテンソル量の独立な成分の数となる。 $a_{\nu\lambda\sigma}^\mu$ の自由度は、H を重複組み合わせとして、 $\boxed{4} \times \boxed{4} \text{H}_{\boxed{3}} = \boxed{4} \times \boxed{6} \text{C}_{\boxed{3}} = \boxed{80}$ となる。一方 $b_{\mu\nu\lambda\sigma}$ の自由度は、 $\boxed{100}$ 通りある^{†1}。したがって、 $a_{\nu\lambda\sigma}^\mu$ をどう調整しても、 $\boxed{100} - \boxed{80} = \boxed{20}$ 個のこる。これは **演習 その5 II** で求めたリーマンの曲率テンソルの自由度の数と同じである。したがって、リーマンの曲率テンソルを縮約して作った 2 階対称テンソルすなわち、 $\boxed{R_{\mu\nu}}$ 及び $\boxed{Rg_{\mu\nu}}$ のみが許されることがわかる。これらの線型結合からダイバージェンスがゼロになるように作ったのが、アインシュタイン方程式である。

^{†1} $a_{\nu\lambda\sigma}^\mu$ は μ, λ, σ について対称だから、添字の組み合わせとしては $4 \times {}_4\text{H}_3 = 80$ 通り。 $b_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は (μ, ν) と (λ, σ) について対称だから ${}_4\text{H}_2 \times {}_4\text{H}_2 = 100$ 通り。