

一般相対論演習その8 (横山)

2022年5月24日配布・6月6日提出締切・7日解答公開予定

<http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html>

【註】 紙を節約するために一週前倒しで配布しています。これは本来は来週配布すべきものなので、提出締切は二週間後になります。

I おさらい 演習 その7 V の結果を用いて、計量

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

におけるアインシュタインテンソルをすべて求めよ。

II シュバルツシルト計量

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

は、その見かけとは裏腹に $r = r_g$ では特異性をもたないが、 $r = 0$ は特異点となっていることを示せ。

III アインシュタイン方程式の数学的背景 以下の **イ** ~ **ル** を適宜埋めよ。

ニュートンの重力ポテンシャルを決定するポアソン方程式をテンソル方程式に拡張し、アインシュタイン方程式を導出した。その操作が正当であることを確かめるため、計量テンソルのたかだか2階微分まで含み、2階微分係数について線形な2階の対称テンソルとして、どのようなものが許されるか、調べよう。

まず、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ はその条件を満たしている。次に、その1階微分 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ は **イ** 系で全てゼロにできるので、これらからゼロでないテンソル量を作ることはできない。そもそも、 $g_{\mu\nu;\lambda} = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \mathbf{□}$ だから、このことは自明である。最後に、2階微分係数と計量テンソルから代数的に作られるテンソルは、リーマンの曲率テンソルで尽くされることを、以下のように自由度の勘定から示す。すなわち、座標について3次の精度の座標変換 $\tilde{x}^\mu = x^\mu + a_{\nu\lambda\sigma}^\mu x^\nu x^\lambda x^\sigma + \mathcal{O}(|x|^4)$ を用いて、**イ** 系近傍における計量テンソル $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + b_{\mu\nu\lambda\sigma} x^\lambda x^\sigma + \mathcal{O}(|x|^3)$ のミンコフスキー計量からのズレを、座標について2次の範囲で、できるだけなくす問題を考えてみる。この係数 $b_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は計量テンソルの2階微分係数に対応するので、どのように $a_{\nu\lambda\sigma}^\mu$ を選んでも、対応する変換で同時にゼロとならない $b_{\mu\nu\lambda\sigma}$ の独立な成分の数が、計量テンソルの2階微分から代数的に構成できるテンソル量の独立な成分の数となる。 $a_{\nu\lambda\sigma}^\mu$ の自由度は、Hを重複組み合わせとして、 $\mathbf{ハ} \times \mathbf{ニ} \mathbf{ホ} = \mathbf{ハ} \times \mathbf{ヘ} \mathbf{ホ} = \mathbf{ト}$ となる。一方 $b_{\mu\nu\lambda\sigma}$ の自由度は、**チ** 通りある。したがって、 $a_{\nu\lambda\sigma}^\mu$ をどう調整しても、**チ** - **ト** = **リ** 個のこる。これは 演習 その5 II で求めたリーマンの曲率テンソルの自由度の数と同じである。したがって、リーマンの曲率テンソルを縮約して作った2階対称テンソルすなわち、**ヌ** 及び **ル** のみが許されることがわかる。これらの線形結合からダイバージェンスがゼロになるように作ったのが、アインシュタイン方程式である。