

General Relativity homework No.7

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 5 月 30 日

0 第 5 回演習の振り返り

皆さんよくできていらっしゃいました (生存者バイアス...?). 解答の仕方にバリエーションがあるような問題ではないと思うので特にコメントはありません. 第 6 回演習は順次採点を行っていきますので, しばしお待ちください.

1 A sample answer

Christoffel 記号は

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\mu,\lambda}) \quad (1.1)$$

であり, この変分を取ると

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \delta\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\mu,\lambda})\right) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma_{\nu\lambda\mu}\delta g^{\alpha\lambda} + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\{(\delta g_{\nu\lambda})_{,\mu} + (\delta g_{\mu\lambda})_{,\nu} - (\delta g_{\nu\mu})_{,\lambda}\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

さらに

$$\delta g^{\alpha\lambda} = -g^{\alpha\mu}g^{\lambda\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= -g^{\alpha\lambda}\delta g_{\lambda\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\{(\delta g_{\nu\lambda})_{,\mu} + (\delta g_{\mu\lambda})_{,\nu} - (\delta g_{\nu\mu})_{,\lambda}\} \\ &= \frac{g^{\alpha\lambda}}{2}(-2\delta g_{\lambda\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \delta g_{\nu\lambda,\mu} + \delta g_{\mu\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\mu,\lambda}) \\ &= \frac{g^{\alpha\lambda}}{2}\{(\delta g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}\delta g_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}\delta g_{\nu\alpha}) \\ &\quad + (\delta g_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\delta g_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\delta g_{\mu\alpha}) \\ &\quad - (\delta g_{\nu\mu,\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\delta g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}\delta g_{\nu\alpha})\} \\ &= \frac{g^{\alpha\lambda}}{2}(\delta g_{\nu\lambda;\mu} + \delta g_{\mu\lambda;\nu} - \delta g_{\nu\mu;\lambda}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

したがって, $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ はテンソルとして振る舞うことが分かる.

コメント

Chritoffel 記号の変分 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ がテンソルであることを示しましたが、この表現は変分原理から Einstein 方程式を導出する際には欠かせません。直接的には Ricci テンソルの変分計算で必要になるわけですが、次の問題でこの事情を詳細に見ます。

2 A sample answer

前問より $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ はテンソルであることが分かったので、 $U_{\mu\nu}^\alpha \equiv \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ と置けば

$$\nabla_\alpha(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = U_{\mu\nu;\alpha}^\alpha = U_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha U_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta U_{\beta\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta U_{\mu\beta}^\alpha, \quad (2.1)$$

$$\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) = U_{\mu\alpha;\nu}^\alpha = U_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha U_{\mu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta U_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta U_{\mu\beta}^\alpha. \quad (2.2)$$

辺々引くと

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) &= U_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha U_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta U_{\beta\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta U_{\mu\beta}^\alpha \\ &\quad - U_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha U_{\mu\alpha}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta U_{\beta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta U_{\mu\beta}^\alpha \\ &= (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)_{,\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \\ &\quad - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)_{,\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\alpha}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \delta\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \\ &= (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)_{,\alpha} - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)_{,\nu} \\ &\quad + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\beta) \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta (\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha) \\ &\quad - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\beta) \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta (\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha). \end{aligned} \quad (2.3)$$

一方, Ricci テンソル

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \quad (2.4)$$

の計量 $g_{\mu\nu}$ による変分は

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)_{,\alpha} - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)_{,\nu} + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\beta) \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta (\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha) - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\beta) \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta (\delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha) \quad (2.5)$$

以上 (2.3) 式と (2.5) 式より

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha). \quad (2.6)$$

コメント

Einstein 方程式の導出に本問の結果を使うはずですが、この導出を行う際に、再び確認してみてください。

3 A sample answer

完全流体とは粘性がなく、流体力学における Euler の方程式と連続の方程式によって運動が決まる流体のことである。 しかしながら、完全流体のエネルギー・運動量テンソルを求めることを目的とする本問において、より都合のよい完全流体の定義から出発しよう。すなわち、完全流体とは、流体の静止系においてそのエネルギー・運動量テンソルが

$$\bar{T}^{ab} = \begin{pmatrix} \rho & & \\ & p & \\ & & p \\ & & & p \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

で与えられるもののことである（須藤さんの「一般相対論入門」を参考にした．ただし，ここで $c = 1$ とし， ρ は流体のエネルギー密度， p は（等方的な）圧力を表すとする．

まず特殊相対論的に一般の慣性系での完全流体のエネルギー・運動量テンソルの表式を求めてから，共変原理によって一般相対論的にも有効な表式を出すことにする．いま，流体の静止系 $\bar{S}$ から，流体が x 方向に速さ v で運動している慣性系 S に移ると

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \bar{x}^\nu; \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \quad \beta = v, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.2)$$

に伴って

$$T = (\Lambda^{-1})^T \bar{T} (\Lambda^{-1})^T = \begin{pmatrix} \gamma^2 \rho + \beta^2 \gamma^2 p & \beta \gamma^2 \rho + \beta \gamma^2 p & & \\ \beta \gamma^2 \rho + \beta \gamma^2 p & \beta^2 \gamma^2 \rho^2 + \gamma^2 p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

と変換される．次の表式

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu} p \quad (3.4)$$

を考えると，今考えている状況，つまり $u^\mu = (\gamma, \gamma v, 0, 0)$ に対して，(3.4) 式の各成分は (3.3) 式と一致する．よって，(3.3) 式が完全流体の特殊相対論的なエネルギー・運動量テンソルの表式を与えることが分かった．対応原理から，一般相対論的にも有効な上式の拡張は

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} p \quad (3.5)$$

である．以上で完全流体に関する一般的なエネルギー・運動量テンソルの表式が求まった．

コメント

一様等方な宇宙を仮定すると， $T_{\mu\nu}$ は完全流体の形に限られます．このことを頭の片隅に入れておくとうまいと思います．証明については，須藤さんの「一般相対論」の問題 6.6 を解いてみてください．

4 A sample answer

一般の球対称時空

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + e^{2\gamma(r,t)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

における Riemann テンソルを求めることを考える．

イ，ロ 講義やその 6 III（スピン接続係数）では，正規直交基底 e^a 等のラベルを $a, b, c, \dots$ で表していたが，ここでは $e^{\hat{t}} = e^{\alpha(r,t)} dt$ のようにハット付きの文字で表すことにすると

$$ds^2 = -(e^{\hat{t}} dt)^2 + (e^{\hat{r}} dr)^2 + (e^{\hat{\theta}} d\theta)^2 + (e^{\hat{\phi}} \sin \theta d\phi)^2 = -(e^{\hat{t}})^2 + (e^{\hat{r}})^2 + (e^{\hat{\theta}})^2 + (e^{\hat{\phi}})^2 \quad (4.2)$$

と書いて

$$e^{\hat{t}} = e^{\alpha} dt, \quad e^{\hat{r}} = e^{\beta} dr, \quad e^{\hat{\theta}} = e^{\gamma} d\theta, \quad e^{\hat{\phi}} = e^{\gamma} \sin \theta d\phi. \quad (4.3)$$

ハ 次に $e^a = e^{\hat{t}}, e^{\hat{r}}, e^{\hat{\theta}}, e^{\hat{\phi}}$ の外微分 de^a を求めてゆく．まず $e^{\hat{t}} = e^\alpha dt$ については

$$\begin{aligned} de^{\hat{t}} &= de^\alpha \wedge dt \\ &= \left(\frac{\partial e^\alpha}{\partial r} dr + \frac{\partial e^\alpha}{\partial t} dt \right) \wedge dt \\ &= \alpha' e^\alpha dr \wedge dt \\ &= \alpha' e^{-\beta} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

ニ、ホ 同様に

$$de^{\hat{r}} = de^\beta \wedge dr = (\beta' e^\beta dr + \dot{\beta} dt) \wedge dr = \dot{\beta} e^\beta dt \wedge dr = \dot{\beta} e^{-\alpha} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}}. \quad (4.5)$$

ヘ、ト 同様に

$$de^{\hat{\theta}} = de^\gamma \wedge d\theta = (\gamma' e^\gamma dr + \dot{\gamma} e^\gamma dt) \wedge d\theta = \gamma' e^\gamma dr \wedge d\theta + \dot{\gamma} e^\gamma dt \wedge d\theta = \dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} + \gamma' e^{-\beta} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}}. \quad (4.6)$$

チ 同様に

$$\begin{aligned} de^{\hat{\phi}} &= d(e^\gamma \sin \theta) \wedge d\phi \\ &= (\gamma' e^\gamma \sin \theta dr + \dot{\gamma} e^\gamma \sin \theta dt + e^\gamma \cos \theta d\theta) \wedge d\phi \\ &= \gamma' e^\gamma \sin \theta dr \wedge d\phi + \dot{\gamma} e^\gamma \sin \theta dt \wedge d\phi + e^\gamma \cos \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= \gamma' e^{-\beta} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}} + \dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}} + \frac{e^{-\gamma}}{\tan \theta} e^{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{\phi}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

リ、ヌ 次に、スピン接続係数 ω^a_b を求めてゆく．その 6 III を思い出すと、スピン接続係数 ω^a_b とは

$$de^a = -\omega^a_b \wedge e^b \quad (4.8)$$

で定義されるのだった．また $\omega_{ab} \equiv \eta_{ac} \omega^c_b$ を導入すると $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ である．さて $a = \hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ であることを思い出すと、たとえば $a = \hat{t}$ について

$$de^{\hat{t}} = -\omega^{\hat{t}}_b \wedge e^b = -\omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} \wedge e^{\hat{r}} - \omega^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{\theta}} - \omega^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} \wedge e^{\hat{\phi}} \quad (4.9)$$

であり、これと (4.4) 式を見比べることにより

$$\omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} = \alpha' e^{-\beta} e^{\hat{t}} + K_1 e^{\hat{r}} = \omega^{\hat{r}}_{\hat{t}}, \quad \omega^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} = K_2 e^{\hat{\theta}} = \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{t}}, \quad \omega^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = K_3 e^{\hat{\phi}} = \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{t}} \quad (4.10)$$

を得る． K_i は適当な関数であって、以下で決定されることになる．

ル 同様に

$$de^{\hat{r}} = -\omega^{\hat{r}}_b \wedge e^b = -\omega^{\hat{r}}_{\hat{t}} \wedge e^{\hat{t}} - \omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{\theta}} - \omega^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} \wedge e^{\hat{\phi}} \quad (4.11)$$

と (4.5) 式を比較することで

$$\omega^{\hat{r}}_{\hat{t}} = \dot{\beta} e^{-\alpha} e^{\hat{r}} + K_4 e^{\hat{t}}, \quad \omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = K_5 e^{\hat{\theta}} = -\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}}, \quad \omega^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = K_6 e^{\hat{\phi}} = -\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}}. \quad (4.12)$$

ヲ、ワ 同様に

$$de^{\hat{\theta}} = -\omega^{\hat{\theta}}_b \wedge e^b = -\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{t}} \wedge e^{\hat{t}} - \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} \wedge e^{\hat{r}} - \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} \wedge e^{\hat{\phi}} \quad (4.13)$$

と (4.6) 式を比較することで^{†1}

$$\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{t}} = \dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{\theta}}, \quad \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} = \gamma' e^{-\beta} e^{\hat{\theta}}, \quad \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = K_7 e^{\hat{\phi}} = -\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}}. \quad (4.14)$$

^{†1} (4.6) 式との比較だけだと $\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{t}}$ に関して $\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{t}} = \dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{\theta}} + L_1 e^{\hat{t}}$, $\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}}$ に関して $\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} = \gamma' e^{-\beta} e^{\hat{\theta}} + L_2 e^{\hat{r}}$ と置くことができるが、上で既に求めた $\omega^{\hat{t}}_{\hat{\theta}}$ や $\omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}}$ の表式を見ると $L_1 = L_2 = 0$ でなければならないことが分かるので、最初からそうしている．以下でも同様に行なう．

カ, ヨ 同様に

$$de^{\hat{\phi}} = -\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{b}} \wedge e^{\hat{b}} = -\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{t}} \wedge e^{\hat{t}} - \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} \wedge e^{\hat{r}} - \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{\theta}} \quad (4.15)$$

と (4.7) 式を比較することで

$$\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{t}} = \dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{\phi}}, \quad \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} = \gamma' e^{-\beta} e^{\hat{\phi}}, \quad \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} = \frac{e^{-\gamma}}{\tan \theta} e^{\hat{\phi}}. \quad (4.16)$$

(i) 以上ですべての K_i とすべてのスピンの接続係数 ω^a_b が求まる. まず K_i については

$$K_1 = \dot{\beta} e^{-\alpha}, \quad K_2 = K_3 = \dot{\gamma} e^{-\alpha}, \quad K_4 = \alpha' e^{-\beta}, \quad K_5 = K_6 = -\gamma' e^{-\beta}, \quad K_7 = -\frac{e^{-\gamma}}{\tan \theta}. \quad (4.17)$$

スピンの接続係数 ω^a_b については, その 0 でないものについて

$$\omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} = \omega^{\hat{r}}_{\hat{t}} = \alpha' e^{-\beta} e^{\hat{t}} + \dot{\beta} e^{-\alpha} e^{\hat{r}}, \quad \omega^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} = \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{t}} = \dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{\theta}}, \quad \omega^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{t}} = \dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{\phi}}; \quad (4.18)$$

$$\omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = -\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} = -\gamma' e^{-\beta} e^{\hat{\theta}}, \quad \omega^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = -\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} = -\gamma' e^{-\beta} e^{\hat{\phi}}; \quad (4.19)$$

$$\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = -\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} = -\frac{e^{-\gamma}}{\tan \theta} e^{\hat{\phi}}. \quad (4.20)$$

タ, レ 次に, その 6 III (iv) で示した式

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d \quad (4.21)$$

を使って曲率 2 形式 R^a_b を求めてゆく. たとえば

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= d\omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} + \omega^{\hat{t}}_c \wedge \omega^c_{\hat{r}} \\ &= d\omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} + \omega^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} + \omega^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} \\ &= d\left(\alpha' e^{\alpha-\beta} dt + \dot{\beta} e^{\beta-\alpha} dr\right) + \underbrace{(\dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{\theta}}) \wedge (\gamma' e^{-\beta} e^{\hat{\theta}})}_0 + \underbrace{(\dot{\gamma} e^{-\alpha} e^{\hat{\phi}}) \wedge (\gamma' e^{-\beta} e^{\hat{\phi}})}_0 \\ &= [\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha' \beta'] e^{\alpha-\beta} dr \wedge dt + [\dot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta} \dot{\alpha}] e^{-\alpha+\beta} dt \wedge dr. \end{aligned} \quad (4.22)$$

途中で (4.3) の関係を使って基底を適宜書き直した.

ソ 引き続き式変形をしてゆき, 今度は $e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}}$ で表すことを目標にすると

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= \{[-\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha' \beta'] e^{\alpha-\beta} + [\dot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta} \dot{\alpha}] e^{-\alpha+\beta}\} dt \wedge dr \\ &= \{[-\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha' \beta'] e^{-2\beta} + [\dot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta} \dot{\alpha}] e^{-2\alpha}\} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

ツ, ネ 上の (4.23) 式を例にして, 対応する R^a_{bcd} を求めてみよう. (4.23) 式は (4.21) 式の $a = \hat{t}, b = \hat{r}$ 成分であり

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= \frac{1}{2} R^{\hat{t}}_{\hat{r}cd} e^c \wedge e^d \\ &= \frac{1}{2} (R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}} + R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{t}} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}}) \\ &= R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

であるから, (4.23) 式と見比べると

$$R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = [-\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha'\beta']e^{-2\beta} + [\dot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}]e^{-2\alpha}, \quad (4.25)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{\theta}} = 0, \quad R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\theta}} = 0 \quad (4.26)$$

等.

ナ, ラ R^a_{bcd} が求まると, 関係式

$$R^a_{bcd} = e^\alpha_\lambda e^\alpha_b e^\mu_c e^\nu_d R^\lambda_{\alpha\mu\nu} \quad (4.27)$$

によって, 座標基底で表した通常の Riemann テンソル $R^\lambda_{\alpha\mu\nu}$ の対応する成分を求めることができる. 引き続き上で扱った $R^{\hat{t}}_{\hat{r}}$ の例で話を進めると, (4.25) 式に示されている成分について

$$R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = e^{\hat{t}}_\lambda e^{\hat{t}}_{\hat{r}} e^\alpha_\lambda e^\mu_{\hat{r}} e^\nu_{\hat{r}} R^\lambda_{\alpha\mu\nu} \quad (4.28)$$

であるので, 先に e^α_μ を知っておく必要がある. これらテトラードは定義より $e^a = e^\alpha_\mu dx^\mu$ であったから, (4.3) を見て

$$e^{\hat{t}}_t = e^\alpha, \quad e^{\hat{r}}_r = e^\beta, \quad e^{\hat{\theta}}_\theta = e^\gamma, \quad e^{\hat{\phi}}_\phi = e^\gamma \sin \theta \quad (4.29)$$

であり, その他 (非対角成分) はすべて 0 である. つまり, e^α_μ は対角的. 以上で e^α_μ が求まったので, (4.28) 式に戻って

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= e^{\hat{t}}_t e^{\hat{r}}_r e^{\hat{t}}_t e^{\hat{r}}_r R^t_{rtr} \\ &= e^\alpha e^{-\beta} e^{-\alpha} e^{-\beta} R^t_{rtr}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

ゆえに

$$R^t_{rtr} = e^{2\beta} R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = [-\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha'\beta'] + [\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}]e^{-2(\alpha-\beta)}. \quad (4.31)$$

- (ii) 他の成分も同様にして求める. すなわち, まず R^a_b の e^a 基底による表式を $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ によって求め, それを曲率 2 形式の定義式 (4.21) と比べることで対応する R^a_{bcd} を求め, そこから関係式 (4.27) によって対応する $R^\lambda_{\alpha\mu\nu}$ を求める. そのためにまず, 各 $R^a_b = R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}}, R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}}, R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}}, R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}}, R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}}$ を求めておく.

- $\underline{R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}}}$

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} &= d\omega^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} + \omega^{\hat{t}}_c \wedge \omega^c_{\hat{\theta}} \\ &= d(\dot{\gamma}e^{-\alpha}e^{\hat{\theta}}) + \omega^{\hat{t}}_{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} + \omega^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} \\ &= \dots ((4.22) を導いたときと同様に計算) \\ &= \{[\ddot{\gamma} + (\dot{\gamma})^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha}]e^{-\alpha+\gamma} - \alpha'\gamma'e^{-\alpha-2\beta+\gamma}\}dt \wedge d\theta \\ &\quad + [(\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha')e^{-\alpha+\gamma} - \dot{\beta}\gamma'e^{-\alpha+\gamma}]dr \wedge d\theta \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} &= \{[\ddot{\gamma} + (\dot{\gamma})^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha}]e^{-2\alpha} - \alpha'\gamma'e^{-2\beta}\}e^{\hat{t}} \wedge de^{\hat{\theta}} \\ &\quad + [(\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

- $\underline{R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}}, R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}}, R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}}, R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}}}$ 以下すべて同様に

$$\begin{aligned}
R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} &= [(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha})e^{-2\alpha} - \alpha'\gamma'e^{-2\beta}]e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}} + (\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}}, \\
R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} &= (-\dot{\gamma}' - \dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}\alpha' + \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} + \{\dot{\beta}\dot{\gamma}e^{-2\alpha} - [\gamma'' + (\gamma')^2 - \gamma'\beta']e^{-2\beta}\}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}}, \\
R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} &= (-\dot{\gamma}' - \dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}\alpha' + \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}} + \{\dot{\beta}\dot{\gamma}e^{-2\alpha} - [\gamma'' + (\gamma')^2 - \gamma'\beta']e^{-2\beta}\}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}}, \\
R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} &= [\dot{\gamma}^2e^{-2\alpha} - (\gamma')^2e^{-2\beta} + e^{-2\gamma}]e^{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{\phi}}.
\end{aligned}$$

(iii) よって、今度は曲率 2 形式の定義

$$R^a_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}e^c \wedge e^d \quad (4.34)$$

から、対応する R^a_{bcd} を求めることができる。

$$\bullet \quad \underline{R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} \rightarrow e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} \quad \& \quad e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}}}$$

$$\begin{aligned}
R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} &= \frac{1}{2}R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}cd}e^c \wedge e^d \\
&= \frac{1}{2}R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}i\hat{\theta}}e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} + \frac{1}{2}R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}} + \frac{1}{2}R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{t}}e^{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{t}} + \frac{1}{2}R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}}e^{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{r}} \\
&= R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}i\hat{\theta}}e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} + R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}}.
\end{aligned} \quad (4.35)$$

これと (ii) で得た $R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}}$ を比べて

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}i\hat{\theta}} = (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha})e^{-2\alpha} - \alpha'\gamma'e^{-2\beta}, \quad (4.36)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = (\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}. \quad (4.37)$$

$$\bullet \quad \underline{R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} \rightarrow e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}} \quad \& \quad e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}}} \quad \text{同様に}$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}} + R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}} \quad (4.38)$$

と (ii) で得た $R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}}$ を比べて

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha})e^{-2\alpha} - \alpha'\gamma'e^{-2\beta}, \quad (4.39)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = (\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}. \quad (4.40)$$

$$\bullet \quad \underline{R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} \rightarrow e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} \quad \& \quad e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}}} \quad \text{同様に}$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} + R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}} \quad (4.41)$$

と (ii) で得た $R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}}$ を比べて

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = (-\dot{\gamma}' - \dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}\alpha' + \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}, \quad (4.42)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = \dot{\beta}\dot{\gamma}e^{-2\alpha} - [\gamma'' + (\gamma')^2 - \gamma'\beta']e^{-2\beta}. \quad (4.43)$$

$$\bullet \quad \underline{R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} \rightarrow e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}} \quad \& \quad e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}}} \quad \text{同様に}$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\phi}} + R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\phi}} \quad (4.44)$$

と (ii) で得た $R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}}$ を比べて

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = (-\dot{\gamma}' - \dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}\alpha' + \dot{\beta}\gamma')e^{-\alpha-\beta}, \quad (4.45)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \dot{\beta}\dot{\gamma}e^{-2\alpha} - [\gamma'' + (\gamma')^2 - \gamma'\beta']e^{-2\beta}. \quad (4.46)$$

- $R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} \rightarrow e^{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{\phi}}$ 同様にして

$$R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \dot{\gamma}^2 e^{-2\alpha} - (\gamma')^2 e^{-2\beta} + e^{-2\gamma}. \quad (4.47)$$

(iv) 最後に、関係式

$$R^a_{bcd} = e^a_{\lambda} e_b^{\mu} e_c^{\nu} e_d^{\rho} R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} \quad (4.48)$$

を使って、座標基底で表した通常の Riemann テンソル $R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu}$ を求めよう。ここで、 e^a_{μ} が対角的であったことを再び思い出しておく。各成分は (4.29) で既に求められている。

- $R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}}$ 由来： $R^t_{\theta t\theta}$ & $R^t_{\theta r\theta}$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = e^{\hat{t}}_{\lambda} e_{\hat{\theta}}^{\alpha} e_{\hat{t}}^{\mu} e_{\hat{\theta}}^{\nu} R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = e^{\hat{t}}_t e_{\hat{\theta}}^{\theta} e_{\hat{t}}^t e_{\hat{\theta}}^{\theta} R^t_{\theta t\theta} = e^{-2\gamma} R^t_{\theta t\theta},$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = e^{\hat{t}}_{\lambda} e_{\hat{\theta}}^{\alpha} e_{\hat{r}}^{\mu} e_{\hat{\theta}}^{\nu} R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = e^{\hat{t}}_t e_{\hat{\theta}}^{\theta} e_{\hat{r}}^r e_{\hat{\theta}}^{\theta} R^t_{\theta r\theta} = e^{\alpha-\beta-2\gamma} R^t_{\theta r\theta}$$

と (4.36) 式, (4.37) 式より

$$R^t_{\theta t\theta} = (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha})e^{-2(\alpha-\gamma)} - \alpha'\gamma'e^{-2(\beta-\gamma)}, \quad (4.49)$$

$$R^t_{\theta r\theta} = (\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma')e^{-2(\alpha-\gamma)}. \quad (4.50)$$

- $R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}}$ 由来： $R^t_{\phi t\phi}$ & $R^t_{\phi r\phi}$ 同様に

$$R^t_{\phi t\phi} = (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\gamma}\dot{\alpha})\sin^2\theta e^{-2(\alpha-\gamma)} - \alpha'\gamma'\sin^2\theta e^{-2(\beta-\gamma)}, \quad (4.51)$$

$$R^t_{\phi r\phi} = (\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \dot{\gamma}\alpha' - \dot{\beta}\gamma')\sin^2\theta e^{-2(\alpha-\gamma)}. \quad (4.52)$$

- $R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}}$ 由来： $R^r_{\theta t\theta}$ & $R^r_{\theta r\theta}$ 同様に

$$R^r_{\theta t\theta} = (-\dot{\gamma}' - \dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}\alpha' + \dot{\beta}\gamma')e^{-2(\beta-\gamma)}, \quad (4.53)$$

$$R^r_{\theta r\theta} = \dot{\beta}\dot{\gamma}e^{-2(\alpha-\gamma)} - [\gamma'' + (\gamma')^2 - \gamma'\beta']e^{-2(\beta-\gamma)}. \quad (4.54)$$

- $R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}}$ 由来： $R^r_{\phi t\phi}$ & $R^r_{\phi r\phi}$ 同様に

$$R^r_{\phi t\phi} = (-\dot{\gamma}' - \dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}\alpha' + \dot{\beta}\gamma')\sin^2\theta e^{-2(\beta-\gamma)}, \quad (4.55)$$

$$R^r_{\phi r\phi} = -[\gamma'' + (\gamma')^2 - \gamma'\beta']\sin^2\theta e^{-2(\beta-\gamma)} + \dot{\beta}\dot{\gamma}\sin^2\theta e^{-2(\alpha-\gamma)}. \quad (4.56)$$

- $R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}}$ 由来： $R^{\theta}_{\phi\theta\phi}$ 同様に

$$R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta + \dot{\gamma}^2\sin^2\theta e^{-2(\alpha-\gamma)} - (\gamma')^2\sin^2\theta e^{-2(\beta-\gamma)}. \quad (4.57)$$