

# 一般相対論演習その7 (横山)

2022年5月24日配布・5月30日提出締切・31日解答公開予定

<http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html>

- I クリストッフエル記号  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  はテンソルではないが、計量の変分  $\delta g_{\mu\nu}$  にともなうクリストッフエル記号の変分  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  はテンソルとして変換することを証明せよ。
- II  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  の共変微分  $\nabla_\alpha\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  と  $\nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$  をそれぞれ計算し、その差をとることにより、局所慣性系によらずとも、 $\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)_{;\alpha} - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)_{;\nu}$  が成り立つことを示せ。
- III 完全流体とは何か調べ、そのエネルギー運動量テンソルの表式を与えよ。ただし、 $T_0^0$  ではなく  $T_{00}$  がエネルギー密度と同符号になるように、全体の符号を選ぶこと。
- IV アインシュタイン方程式の宇宙項を右辺に移項し、エネルギー運動量テンソルの一部と見なした場合、宇宙項は完全流体と同じ形を持つことを示せ。エネルギー密度と圧力に対応する量は、それぞれどのように与えられるか述べよ。
- V 以下の空欄を埋めながら説明を読み、問に答えよ。

これまでに導入した微分形式を用いて、一般の球対称時空

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + e^{2\gamma(r,t)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

におけるリーマンテンソルを求めてみよう。 $c=1$  とする。これまでは正規直交基底のラベルを  $e^a$  のようにラテン文字で表してきたが、ここでは  $e^{\hat{t}} = e^{\alpha(r,t)}dt$  のように、ハット付きの文字で表すことにする。すなわち、 $e^{\hat{r}} = e^{\beta}dr$ ,  $e^{\hat{\theta}} = \boxed{\text{イ}}$ ,  $e^{\hat{\phi}} = \boxed{\text{ロ}}$  とかける。 $a, b, c$  などのローマ字は、ハット付きの  $\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  のいずれかを表すものとする。 $t, r$  に関する微分をそれぞれドット、プライムを用いて表すことにすると、まず、

$$de^{\hat{t}} = \alpha' e^{\alpha} dr \wedge dt = \boxed{\text{ハ}} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}} \quad (2)$$

$$de^{\hat{r}} = \boxed{\text{ニ}} dt \wedge dr = \boxed{\text{ホ}} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}} \quad (3)$$

$$de^{\hat{\theta}} = \boxed{\text{ヘ}} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{\theta}} + \boxed{\text{ト}} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{\theta}} \quad (4)$$

$$de^{\hat{\phi}} = \boxed{\text{チ}} \quad (5)$$

さて、前回定義したスピン接続係数  $\omega_b^a$  に対して、 $\omega_{ab} \equiv \eta_{ac}\omega_b^c$  を定義すると、これは  $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$  と反対称であることがわかる。このことを用いて後の計算を進める。まず、今用いているスピン接続係数の定義により

$$de^{\hat{t}} = -\omega_{\hat{r}}^{\hat{t}} e^{\hat{r}} \wedge e^{\hat{t}} - \omega_{\hat{\theta}}^{\hat{t}} e^{\hat{\theta}} \wedge e^{\hat{t}} - \omega_{\hat{\phi}}^{\hat{t}} e^{\hat{\phi}} \wedge e^{\hat{t}}. \quad (6)$$

これと (2) を比較することにより、

$$\omega_{\hat{r}}^{\hat{t}} = \omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \boxed{\text{リ}} e^{\hat{t}} + K_1 e^{\hat{r}}, \quad \omega_{\hat{\theta}}^{\hat{t}} = \omega_{\hat{t}}^{\hat{\theta}} = K_2 e^{\hat{\theta}}, \quad \omega_{\hat{\phi}}^{\hat{t}} = \omega_{\hat{t}}^{\hat{\phi}} = K_3 \boxed{\text{ヌ}} \quad (7)$$

と表されることがわかる。 $K_i$  はこれから決定する未定関数である。

同様に、(3) より

$$\omega^{\hat{r}}_{\hat{t}} = \dot{\beta}e^{-\alpha}e^{\hat{r}} + K_4e^{\hat{t}}, \quad \omega^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = \boxed{\text{ル}} \quad \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} = K_5e^{\hat{\theta}}, \quad \omega^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = \boxed{\text{ル}} \quad \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} = K_6e^{\hat{\phi}}, \quad (8)$$

(4) より、

$$\omega^{\hat{\theta}}_{\hat{t}} = \boxed{\text{ヲ}} e^{\hat{\theta}}, \quad \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} = \boxed{\text{ワ}} e^{\hat{\theta}}, \quad \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = \boxed{\text{ル}} \quad \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} = K_7e^{\hat{\phi}}, \quad (9)$$

(5) より、

$$\omega^{\hat{\phi}}_{\hat{t}} = \boxed{\text{カ}} e^{\hat{\phi}}, \quad \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} = \boxed{\text{ヨ}} e^{\hat{\phi}}, \quad \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}} = \cot \theta e^{-\gamma}e^{\hat{\phi}} \quad (10)$$

(i) 以上の結果より、スピン接続係数  $\omega^a_b$  を全て決定せよ。

次に、公式

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}e^c \wedge e^d \quad (11)$$

を使って曲率 2 形式を求めよう。例えば、

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}}_{\hat{r}} &= d(\alpha'e^{\alpha-\beta}dt + \dot{\beta}e^{\beta-\alpha}dr) + \omega^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}_{\hat{r}} + \omega^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}_{\hat{r}} \\ &= \boxed{\text{タ}} dr \wedge dt + \boxed{\text{レ}} dt \wedge dr = \boxed{\text{ソ}} e^{\hat{t}} \wedge e^{\hat{r}} \end{aligned} \quad (12)$$

これと (11) を比較することにより、 $R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = \boxed{\text{ツ}}$ 、 $R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{\theta}} = R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\theta}} = \boxed{\text{ネ}}$  などがわかる。今の計量では変換行列  $e^a_\mu$  は対角的だから、これより直ちに

$$R^t_{tr} = \boxed{\text{ナ}} \quad R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = \boxed{\text{ラ}}$$

と求められる。

(ii) 同様に、 $R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}}, R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}}, R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}}, R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}}, R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}}$  を求めよ。

(iii) 上の結果から、リーマンテンソルの各成分  $R^a_{bcd}$  を全て求めよ。 $(a, b, c$  などのローマ字は、ハット付きの  $\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  のいずれかを表すことに再び注意しよう。)

(iv) 座標基底で計算した通常の成分表示  $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$  を求めよ。

この方法に従うと、リーマンテンソルの零でない成分だけを求めることができます。