# General Relativity homework No.6

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 5 月 23 日

## 1　A sample answer

イ，ロ 世界点を $x^\mu = (ct, x, y, z)$ で表す．質量 $m$ の粒子が速度 $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}$ で運動しているとき，その 4 元速度は $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau = (\gamma c, \gamma \boldsymbol{v})$ である．ここに $\tau$ は粒子の固有時で $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$ の関係がある．この $u^\mu$ を用いて，4 元運動量 $p^\mu$ は

$$p^\mu = m u^\mu = (p^0, \boldsymbol{p}) = (m\gamma c, m\gamma \boldsymbol{v}). \tag{1.1}$$

ハ 計量を $\eta = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$ として，内積 $p \cdot p = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + \boldsymbol{p}^2$ および $u \cdot u = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$ と $p^\mu = m u^\mu$ より

$$(cp^0)^2 = (mc^2)^2 + (c\boldsymbol{p})^2. \tag{1.2}$$

慣習に従って正号をとると

$$p^0 = \frac{\sqrt{(mc^2)^2 + (c\boldsymbol{p})^2}}{c}. \tag{1.3}$$

ここに $\boldsymbol{p} = m\gamma \boldsymbol{v}$ であり，$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\boldsymbol{p})^2}$ とおくと，$|\boldsymbol{v}|/c \ll 1$ のときに

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \tag{1.4}$$

と展開される．したがって 4 元運動量 $p^\mu$ の第 0 成分について，$cp^0 = E$ は粒子の全エネルギーを表しているとみなすことができる．

ニ 粒子系が速度をもっているような慣性系 $S$ で，微小体積 $\Delta V$ 内の粒子数 $\Delta N$ は，数密度を $n$ として

$$\Delta N = n \Delta V. \tag{1.5}$$

ホ，ヘ Lorentz 変換によって粒子系の静止系 $S_0$ に移り対応する部分の対応する量を考えると，個数 $\Delta N$ は変わらないから

$$\Delta N = n_0 \Delta V_0 \tag{1.6}$$

が成り立つ．したがって，前問の結果と合わせると

$$\Delta V = \frac{1}{\gamma} \Delta V_0, \qquad n = \gamma n_0. \tag{1.7}$$

ト 数密度 $n$ と三次元粒子数束ベクトル $nv^i$ によって次の 4 元ベクトルを導入する：

$$N^\mu = (N^0, \boldsymbol{N}) = \left(n, \frac{n\boldsymbol{v}}{c}\right) = \left(\gamma n_0, \frac{n_0 \boldsymbol{u}}{c}\right) = \frac{n_0}{c}(u^0, \boldsymbol{u}) = \frac{n_0}{c} u^\mu. \tag{1.8}$$

ここに $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = m\gamma \boldsymbol{v}$ より $\boldsymbol{u} = \gamma \boldsymbol{v}$ である．

チ 連続の式の微分形は

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n\,\mathrm{d}V = \int n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.9}$$

という関係から導かれる．すなわち

$$\frac{\partial n}{\partial(ct)} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{n\boldsymbol{v}}{c}\right) = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \partial_\mu N^\mu = 0. \tag{1.10}$$

リ，ヌ 次に，エネルギー密度 $\rho$ を 4 元速度で表すことを考える．$S$ で見て粒子 1 つのエネルギーは問ハで調べたように $cp^0$，単位体積あたりには $n$ 個の粒子があるので

$$\rho = n\cdot cp^0 = nm\gamma c = \gamma n_0\cdot m\gamma c^2 = mn_0(\gamma c)^2 = mn_0(u_0)^2. \tag{1.11}$$

ル，ヲ 運動量密度も同様に考えて

$$S^j = np^j = \gamma n_0\cdot m\gamma v^j = \frac{1}{c}mn_0\cdot\gamma c\cdot\gamma v^j = \frac{1}{c}mn_0u^0u^j. \tag{1.12}$$

ワ（4 元）速度の変化には，時間変化によるものと，時間の経過によって場所が変化したことによるものとが寄与すると考えると

$$\mathrm{d}u^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \frac{\partial u^\mu}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^i}v^i\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

ここに $\mathrm{d}x^i = v^i\mathrm{d}t$ の関係を用いた．これより

$$0 = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u^\mu}{\partial t} + v^j\frac{\partial u^\mu}{\partial x^j} = \frac{1}{\gamma}\left(\gamma c\frac{\partial u^\mu}{\partial x^0} + u^j\frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}\right). \tag{1.14}$$

よって

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u^\mu}{\partial t} + v^j\frac{\partial u^\mu}{\partial x^j} = \frac{1}{\gamma}u^\nu\partial_\nu u^\mu = 0. \tag{1.15}$$

(i)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\partial_t\rho + \partial_j(cS^j) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[mn_0(u^0)^2] + \frac{\partial}{\partial x^j}\big(mn_0u^0u^j\big)\\ &= mn_0\partial_\mu[u^0u^\mu]\\ &= mn_0[u^\mu(\partial_\mu u^0) + u^0(\partial_\mu u^\mu)].\end{aligned} \tag{1.16}$$

ここで $\partial_\mu N^\mu = 0$ より $\partial_\mu u^\mu = 0$ である（問トを見よ）．また問ワで導いた表式で特に $\mu = 0$ とおいた式より $u^\mu(\partial_\mu u^0) = 0$ である．これらを上の式に適用すると

$$\frac{1}{c}\partial_t\rho + \partial_j(cS^j) = 0. \tag{1.17}$$

カ $T^{\mu\nu} = mn_0u^\mu u^\nu$ と定義すると，$T^{00} = \rho, T^{0j} = cS^j$ が満たされてよい（粒子系のエネルギー・運動量テンソル）．

ヨ 問 (i) で示した保存則は，その過程にあるように $\partial_\mu(mn_0u^ou^\mu) = 0$ と表せる．これは，すぐ上で導入した $T^{\mu\nu}$ の保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{1.18}$$

の $\mu = 0$ 成分に他ならない．

(ii) 上の保存則の $\mu=j$ 成分も成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}\partial_\nu T^{j\nu} &= mn_0\partial_\nu(u^j u^\nu)\\ &= mn_0[(\partial_0 u^j)u^0 + u^j\partial_0 u^0 + (\partial_i u^j)u^i L u^j \partial_i u^i]\\ &= mn_0[u^\mu(\partial_\mu u^j) + u^j\partial_\mu u^\mu]\\ &= 0.\end{aligned} \tag{1.19}$$

最後の等号は問 (i) で述べたのと全く同じ理由による．さて，次のように表しておき，この意味を考えよう．

$$\partial_\nu T^{j\nu} = \partial_0 T^{j0} + \partial_i T^{ji} = 0. \tag{1.20}$$

まず $T^{j0} = mn_0 u^j u^0 = T^{0j} = cS^j$ であり，これは $j$-方向の運動量密度を表すのだった．$\partial_0 T^{j0}$ は $S^j$ の時間方向に関する変化率を表している．さらに問タを先取りすると，$T^{ji} = mn_0 u^j u^i = S^j v^i$ と表されることが分かり，これは運動量流速密度 $S^j$ の $i$-方向に関する流れを表している．$\partial_i T^{ji}$ は $S^j$ の空間方向に関する変化率を表している．したがって $\partial_\nu T^{j\nu}=0$ は運動量密度 $S^j$ の 4 次元的な保存則を表していると解釈することができる．

(iii) ある空間領域 $V$ 内の全運動量

$$P^j \equiv \int_V \frac{1}{c}T^{j0}\,\mathrm{d}^3x \tag{1.21}$$

の時間変化について

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^j = \int_V \frac{\partial T^{j0}}{\partial x^0}\mathrm{d}^3x = -\int_V \frac{\partial T^{ji}}{\partial x^i}\mathrm{d}^3x = -\int_{\partial V} T^{ji} n_i\,\mathrm{d}S. \tag{1.22}$$

2 番目の等号では (ii) で示した保存則を用いた．また $n_i = \boldsymbol{n}$ は $\partial V$ に垂直で外向きな法線ベクトルである．最左辺は領域 $V$ 内の運動量密度の時間変化を表しているので，最右辺にある $T^{ji}$ は領域 $V$ を単位時間に出入りする運動量流速密度を表していることになる．

タ 問 (ii) の過程で既に書いたように，$T^{kj}$ は $T^{kj} = S^k v^j$ と表すことができるので，これは運動量流速密度と解釈することもできる．

コメント

本問についての議論は, Schuz の「相対論入門 I」の第 4 章が非常に良いリファレンスになると思いますので, ぜひ確認してみてください.

## 2 A sample answer

作用汎関数

$$S = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \tag{2.1}$$

の計量 $g_{\mu\nu}$ による変分が

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})\,\mathrm{d}^4x = \cdots = \frac{1}{c}\int [\quad \cdots \quad]\delta(g_{\mu\nu})\,\mathrm{d}^4x \tag{2.2}$$

と書けたときに

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{c}[\quad \cdots \quad] \tag{2.3}$$

と書くのだった．これはまた $\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g}) = [\quad \cdots \quad]\delta(g_{\mu\nu})$ でもあるので

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{c}\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{c}[\quad \cdots \quad] \tag{2.4}$$

という関係がある．いま $T_{\mu\nu}$ と $T^{\mu\nu}$ の間には，これらがテンソルであるので

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}T^{\rho\sigma} \tag{2.5}$$

の関係があって

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.6}$$

と定義したのだった．この最右辺をまず考え，$T^{\mu\nu}$ のもう少し具体的な表式を導いてから添字を 2 つとも下げて $T_{\mu\nu}$ を得る．他方で $\delta S/\delta g^{\mu\nu}$ を計算しておき，最後に両者を見比べることで証明が完了するという流れでいこう．まず

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g}) &= (\delta\mathcal{L})\sqrt{-g} + \mathcal{L}(\delta\sqrt{-g}) \\
&= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \frac{\mathcal{L}}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\mathcal{L}}{2}g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

だから[†1]，$T^{\mu\nu}$ の定義と関係式 (2.4) を使えば

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}g^{\mu\nu} + 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.8}$$

を得る．次にこの添字を下げて

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}T^{\rho\sigma} \\
&= g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\left(\mathcal{L}g^{\rho\sigma} + 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\rho\sigma}}\right) \\
&= \mathcal{L}g_{\mu\nu} + 2g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\rho\sigma}}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

いま $V^{\rho\sigma} \equiv \delta\mathcal{L}/\delta g_{\rho\sigma}$ とおくと，これはすぐ上の式からテンソルであることが分かる（$\mathcal{L}$ がスカラーであること，および商の定理）．よって

$$\delta\mathcal{L} = \delta g_{\rho\sigma}V^{\rho\sigma} = -g_{\rho\alpha}g_{\beta\sigma}\delta g^{\alpha\beta}V^{\rho\sigma} = -V_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{2.10}$$

より[†2]，$V_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}V^{\rho\sigma} = -\delta\mathcal{L}/\delta g^{\mu\nu}$ となり

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}g_{\mu\nu} - 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.11}$$

---

[†1] 1 行目から 2 行目の変形で $\delta\sqrt{-g} = (1/2)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ を使った．

[†2] $g_{\mu\nu}$ での変分を $g^{\mu\nu}$ での変分に変えるための関係式 $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}$ を用いた．これは $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ の両辺の変分を考えることで示せる．ここからさらに，$\delta\sqrt{-g} = (1/2)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -(1/2)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ が出る．そしてこれは，$S$ を $g^{\mu\nu}$ で変分して (2.12) 式を導く際に用いられるであろう．

さて一方で $S$ の $g^{\mu\nu}$ による変分を考えると

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{c}\int \delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})\,\mathrm{d}^4x \\ &= \frac{1}{c}\int [(\delta\mathcal{L})\sqrt{-g} + \mathcal{L}(\delta\sqrt{-g})]\,\mathrm{d}^4x \\ &= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} - \frac{\mathcal{L}}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}}{2}g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.12}$$

となるので

$$-\frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathcal{L}g_{\mu\nu} - 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.13}$$

以上，(2.11) 式と (2.13) 式から

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.14}$$

# 3 A sample answer

(i) テトラード $e^a_\mu$ を用いて表した正規直交基底

$$e^a = e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu \tag{3.1}$$

は 1 形式である．ここで $e^a_\mu \equiv \partial\bar{x}^a/\partial x^\mu$ であった．さて，上に書いた $e^a$ の微分（外微分）は

$$\mathrm{d}e^a = \mathrm{d}e^a_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu = e^a_{\mu,\nu}\mathrm{d}x^\nu \wedge dx^\mu. \tag{3.2}$$

(ii) (i) の結果に対して

$$\mathrm{d}e^a = e^a_{\mu,\nu}\mathrm{d}x^\nu \wedge dx^\mu \equiv -\omega^a{}_b \wedge e^b \tag{3.3}$$

とするとき

$$\omega^a{}_b = -e^a_{\mu,\nu}e^\mu_b \mathrm{d}x^\nu \equiv \omega^a{}_{b\nu} \tag{3.4}$$

であることを示したい．つまり，$\mathrm{d}x^\mu \propto e^b$ とできるか？ ということを考えたい．そのためには，$e^a = e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu$ を $\mathrm{d}x^\mu$ について解ければよい．テトラード $e^a_\mu$ の定義を思い出すと

$$e^a_\mu e^\nu_b = \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\bar{x}^b} \tag{3.5}$$

であるから，ラベル $a$ と $b$ で縮約をとれば $e^a_\mu e^\nu_a = \delta^\nu{}_\mu$ である[†3]．そこで $e^a = e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu$ の両辺に $e^\nu_a$ を掛ければ $e^a e^\nu_a = \delta^\nu{}_\mu \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x^\nu$ より $\mathrm{d}x^\mu = e^\mu_a e^a$．よって

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^a &= e^a_{\mu,\nu}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \\ &= e^a_{\mu,\nu}\mathrm{d}x^\nu \wedge (e^\mu_b e^b) \\ &= e^a_{\mu,\nu}e^\mu_b \mathrm{d}x^\nu \wedge e^b \qquad (3.6) \\ &= -\omega^a{}_b \wedge e^b. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

ただし

$$\omega^a{}_b = -e^a_{\mu,\nu}e^\mu_b \mathrm{d}x^\nu \equiv \omega^a{}_{b\nu}\mathrm{d}x^\nu. \tag{3.8}$$

†3　$\mu$ と $\nu$ で縮約すると $e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a{}_b$.

(iii) 任意の反変あるいは共変ベクトルに共変微分を順番を変えて 2 回施したものの差は，Riemann テンソルを用いて

$$A^{\mu}{}_{;\nu\sigma} - A^{\mu}{}_{;\sigma\nu} = -R^{\mu}{}_{\alpha\nu\sigma}A^{\alpha}, \qquad A_{\mu;\nu\sigma} - A_{\mu;\sigma\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma}A_{\alpha} \tag{3.9}$$

と表されるのだった（その 3 V とその共変 ver.）．これに関連して，示すべき式の右辺を見ると

$$e^{a}_{\lambda}e^{\alpha}_{b}R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\nu} = -e^{a}_{\lambda}(e^{\lambda}_{b;\mu\nu} - e^{\lambda}_{a;\nu\mu}) = e^{\alpha}_{b}(e^{a}_{\alpha;\mu\nu} - e^{a}_{\alpha;\nu\mu}) \tag{3.10}$$

の通り，反変ベクトル的，共変ベクトル的の両方として表現可能である．ここでは後者を考える．そして最右辺の式を計算すると示すべき式の左辺になるはずであるから，それを期待して計算を実行してみることにする．さて，テトラード $e^{a}_{\alpha}$ を 2 回共変微分した $e^{a}_{\alpha;\mu\nu}$ のような量は何か? 1 回だけ共変微分したものであれば既に

$$\omega^{a}{}_{b\nu} = -e^{a}_{\mu;\nu}e^{\mu}_{b} \tag{3.11}$$

に現れているから，この両辺に共変微分を施せば $e^{a}_{\alpha;\mu\nu}$ のような量が出てくることに注目して

$$\omega^{a}{}_{b\nu;\mu} = -e^{a}_{\alpha;\nu\mu}e^{\alpha}_{b} - e^{a}_{\alpha;\nu}e^{\alpha}_{b;\mu}, \qquad \omega^{a}{}_{b\mu;\nu} = -e^{a}_{\alpha;\mu\nu}e^{\alpha}_{b} - e^{a}_{\alpha;\mu}e^{\alpha}_{b;\nu}. \tag{3.12}$$

辺々引くと

$$\omega^{a}{}_{b\nu;\mu} - \omega^{a}{}_{b\mu;\nu} = e^{\alpha}_{b}\underbrace{(e^{a}_{\alpha;\mu\nu} - e^{a}_{\alpha;\nu\mu})}_{e^{a}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\nu}} + (e^{a}_{\alpha;\mu}e^{\alpha}_{b;\nu} - e^{a}_{\alpha;\nu}e^{\alpha}_{b;\mu}). \tag{3.13}$$

左辺は Christoffel 記号の下付き添字に関する対称性から（電磁場の $F_{\mu\nu}$ に対してやったときと同様に）$\partial_{\mu}\omega^{a}{}_{b\nu} - \partial_{\nu}\omega^{a}{}_{b\mu}$ に等しい．したがって

$$\partial_{\mu}\omega^{a}{}_{b\nu} - \partial_{\nu}\omega^{a}{}_{b\mu} + (e^{a}_{\alpha;\nu}e^{\alpha}_{b;\mu} - e^{a}_{\alpha;\mu}e^{\alpha}_{b;\nu}) = e^{\alpha}_{b}e^{a}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\nu} \tag{3.14}$$

を得る．この左辺のカッコ内が $\omega^{a}{}_{c\mu}\omega^{c}{}_{b\nu} - \omega^{a}{}_{c\nu}\omega^{c}{}_{b\mu}$ に等しいことが示せれば証明は完了する．これらの量は $\omega^{a}{}_{b\nu} = -e^{a}_{\mu;\nu}e^{\mu}_{b}$ で定義されていたことを思い出して，まず

$$\omega^{a}{}_{c\mu}\omega^{c}{}_{b\nu} - \omega^{a}{}_{c\nu}\omega^{c}{}_{b\mu} = e^{a}_{\alpha;\mu}e^{\alpha}_{c}e^{c}_{\beta;\nu}e^{\beta}_{b} - e^{a}_{\alpha;\nu}e^{\alpha}_{c}e^{c}_{\beta;\mu}e^{\beta}_{b} \tag{3.15}$$

と変形する．(3.15) の右辺を (3.14) のカッコ内を見比べると，第 1 項，第 2 項のそれぞれについて，波線部のどちらかのローマン・アルファベット・ラベルが下に来て（同時にギリシャ添え字が上に来て）欲しいと願う．そこで (3.5) 式で $a$ と $b$ を縮約して得られる式 $e^{a}_{\alpha}e^{\beta}_{a} = \delta^{\beta}{}_{\alpha}$ の両辺に共変微分を施してから $e^{b}_{\beta}$ を掛ければ

$$e^{b}_{\alpha;\mu} = -e^{b}_{\beta}e^{a}_{\alpha}e^{\beta}_{a;\mu} \tag{3.16}$$

を得る．この式はテトラードの添字について，ギリシャ添字とローマン・アルファベット・ラベルの上下を入れ替えることを可能にしてくれる．そこで (3.15) 式の $e^{c}_{\beta;\nu}$ と $e^{c}_{\beta;\mu}$ に (3.16) 式を使うと

$$\begin{aligned}
\omega^{a}{}_{c\mu}\omega^{c}{}_{b\nu} - \omega^{a}{}_{c\nu}\omega^{c}{}_{b\mu} &= e^{a}_{\alpha;\mu}e^{\alpha}_{c}e^{c}_{\beta;\nu}e^{\beta}_{b} - e^{a}_{\alpha;\nu}e^{\alpha}_{c}e^{c}_{\beta;\mu}e^{\beta}_{b} \\
&= e^{a}_{\alpha;\mu}e^{\alpha}_{c}(-e^{c}_{\gamma}e^{d}_{\beta}e^{\gamma}_{d;\nu})e^{\beta}_{b} - e^{a}_{\alpha;\nu}e^{\alpha}_{c}(-e^{c}_{\gamma}e^{d}_{\beta}e^{\gamma}_{;\mu})e^{\beta}_{b} \\
&= -e^{a}_{\alpha;\mu}e^{\alpha}_{b;\nu} + e^{a}_{\alpha;\nu}e^{\alpha}_{b;\mu}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

最後に (3.15) 式と (3.17) 式を見比べれば

$$\partial_{\mu}\omega^{a}{}_{b\nu} - \partial_{\nu}\omega^{a}{}_{b\mu} + \omega^{a}{}_{c\mu}\omega^{c}{}_{b\nu} - \omega^{a}{}_{c\nu}\omega^{c}{}_{b\mu} = e^{\alpha}_{b}e^{a}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\nu}. \tag{3.18}$$

(iv) 前問で導いた式 (3.18) が微分形式を用いて

$$\mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e^c \wedge e^d \equiv R^a{}_b \tag{3.19}$$

と表せることを示す．ここに $R^a{}_{bcd} = e^a_\lambda e^\alpha_b e^\mu_c e^\nu_d R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu}$ である．示すべき式 (3.19) の各項を適当に変形することで，(3.19) 式と (3.18) 式が同じであることを示すという方針でゆく．まず $\omega^a{}_b = -e^a_{\mu;\nu} e^\mu_b \mathrm{d}x^\nu = \omega^a{}_{b\nu} \mathrm{d}x^\nu$ であって

$$\mathrm{d}\omega^a{}_b = \mathrm{d}(\omega^a{}_{b\nu} \mathrm{d}x^\nu) = \omega^a{}_{b\nu;\mu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{3.20}$$

である．第 2 項については

$$\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = (\omega^a{}_{c\mu} \mathrm{d}x^\mu) \wedge (\omega^c{}_{b\nu} \mathrm{d}x^\nu) = \omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{3.21}$$

右辺については，まず正規直交基底のテトラードによる展開 $e^a = e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu$ より

$$e^c \wedge e^d = (e^c_\mu \mathrm{d}x^\mu) \wedge (e^d_\nu \mathrm{d}x^\nu) = e^c_\mu e^d_\nu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{3.22}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e^c \wedge e^d &= \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e^c_\mu e^d_\nu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \frac{1}{2} e^a_\lambda e^\alpha_b e^\mu_c e^\nu_d e^c_\mu e^d_\nu R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \frac{1}{2} e^a_\lambda e^\alpha_b R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu. \end{aligned} \tag{3.23}$$

以上より (3.19) 式は

$$\omega^a{}_{b\nu;\mu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu + \omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2} e^a_\lambda e^\alpha_b R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{3.24}$$

と表されることが分かった．これは，微分形式での基底 $\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ が付いたテンソル方程式である．そこで前問で示した式 (3.18) にも基底（テンソル基底）$\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ が付いていると考えて，テンソル積 $\otimes$ とウェッジ積 $\wedge$ の関係を考えよう．今の場合に便利な定義として，次を採用しよう：

$$T_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \equiv T_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu - T_{\nu\mu} \mathrm{d}x^\nu \otimes \mathrm{d}x^\mu = (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu. \tag{3.25}$$

最後の等号では，今の成分表示のしかたではテンソル積の順番は問題にならないことを用いた．さて，(3.25) 式に従って (3.24) 式をテンソル基底で書き換えると，左辺は

$$(\omega^a{}_{b\nu;\mu} - \omega^a{}_{b\mu;\nu}) \,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu + (\omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu}) \,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \tag{3.26}$$

となる．前者の項については再び共変微分が通常の変微分に置き換わる．また右辺は

$$\left( \frac{1}{2} e^a_\lambda e^\alpha_b R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2} e^a_\lambda e^\alpha_b R^\lambda{}_{\alpha\nu\mu} \right) \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = e^a_\lambda e^\alpha_b R^\lambda{}_{\alpha\nu\mu} \,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \tag{3.27}$$

となる．Riemann テンソルの添字に関する反対称性 $-R^\lambda{}_{\alpha\nu\mu} = R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu}$ を用いた．以上，テンソル基底を取って左辺と右辺を等値すると

$$\partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu} = e^\alpha_b e^a_\lambda R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu} \tag{3.28}$$

を得る．これは (3.18) 式に他ならない．以上の式変形は逆に辿ることもできるから，結局，(3.19) 式と (3.18) 式が等価であることが示された．

コメント

本問へ取り組むには, まずテトラード (非座標基底) と座標基底の区別をしっかりとつけておかねばなりません. テトラードの導入については"場古典"の § 98 が最も分かりやすいと思うので, 不安な方は授業ノートを参考にしながらこれを確認してみてください. その後の計算は, ややニッチですが, Chandrasekhar の"The Mathematical Theory of Black Holes"の 1.7 が参考になると思います (私は 1.7 の全てを追ってはいません...).