一般相対論演習その６（横山）

2022 年 5 月 17 日配布・5 月 23 日提出締切・24 日解答公開予定
http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/˜ yokoyama/g2022.html

I　特殊相対論における粒子系のエネルギー運動量テンソル

以下の空欄を埋めながら読み、問いに答えよ。

まず、質量 m の粒子の速度が v^i で与えられるとき、その粒子の四元運動量ベクトル p^μ は、ローレンツ因子 γ を用いて $p^0 = \boxed{\text{イ}}$, $p^i = \boxed{\text{ロ}}$ のように与えられる。第ゼロ成分は粒子の持つ $\boxed{\text{ハ}}$ を表す。

次に同じ速度を持ったこのような粒子が多数ある場合を考える。今考えている慣性系 S で、微小体積 ΔV 内の粒子数 ΔN は、数密度を n として、$\Delta N = \boxed{\text{ニ}}\ \Delta V$ と表される。ローレンツ変換によって粒子の静止系に S_0 移り、対応する場所を見ると、粒子数は変わらないから、$\Delta N = n_0 \Delta V_0$ と表される。n_0 は粒子の静止系での数密度であり、これは固有数密度と呼ばれるスカラー量である。ΔV と ΔV_0 の間には、$\Delta V = \boxed{\text{ホ}}\ \Delta V_0$ という等式が成り立つ。つまり、$n = \boxed{\text{ヘ}}\ n_0$ である。

そこで、数密度 n と三次元粒子数束ベクトル nv^i によって四元ベクトル N^μ を $N^0 = n$, $N^i = nv^j/c$ と定義すると、これは四元速度 u^μ と固有数密度を使って $N^\mu = \boxed{\text{ト}}$ と表すこともできる。これは四元反変ベクトルである。これを使うと、連続の式は $\partial_\mu \boxed{\text{チ}} = 0,$ という簡単な形で表される。

次に、エネルギー密度 ρ を四元速度で表すと、$\rho = nm \boxed{\text{リ}} = mn_0 \boxed{\text{ヌ}}$ と書けるので、運動量密度 S^j は

$$S^j = \boxed{\text{ル}}\ p^j = \frac{1}{c} m n_0 \boxed{\text{ヲ}} \tag{1}$$

と定義するのが自然であることがわかる。

外力は働いていないとすると、$m\dfrac{du^\mu}{dt} = 0$ が各粒子毎に、各の軌道に沿って成り立つ。これはラグランジュ的描像である。多数の粒子が存在していることに鑑みて、これを今注目している点においてオイラー的に書くと、

$$\frac{du^\mu}{dt} = \frac{\partial u^\mu}{\partial t} + v^j \frac{\partial u^\mu}{\partial x^j} = \boxed{\text{ワ}}\ u^\nu \partial_\nu u^\mu = 0 \tag{2}$$

が成り立つことがわかる。

(i)　以上より、保存則

$$\frac{1}{c}\partial_t \rho + \partial_j (cS^j) = 0 \tag{3}$$

が成り立つことを示せ。

保存則が成り立つことは示せても、n はスカラーではないので、(ρ, cS^j) は四元ベクトルにはならない。この保存則をテンソル方程式として表すために、ρ と cS^j を含むようなテンソルを探してみよう。四元ベクトル以外で最も階数と自由度数の低いのは二階対称テンソルなので、スカラー量 n_0 を用いて、$T^{\mu\nu} \equiv \boxed{\text{カ}}$ と定義すると、$T^{00} = \rho$, $T^{0j} = cS^j$ が満たされる。これが粒子系のエネルギー運動量テンソルである。

保存則 (3) は、テンソル方程式 $\boxed{\text{ヨ}} = 0$ の時間的（第ゼロ）成分であることがわかる。

(ii) このテンソル方程式の空間的成分も成り立つことを示し、その意味するところを説明せよ。

(iii) ある空間領域 V 内の全運動量 $P^j \equiv \int_V \frac{1}{c} T^{j0} d^3x$ の時間微分を境界面 ∂V 上での面積分で書き換えることにより、T^{kj} の持つ意味を説明せよ。

なお、T^{kj} は $T^{kj} = S^k \boxed{\text{タ}}$ と表すこともできるので、運動量流束密度と解釈することもできる。

II S を作用汎関数とする。

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \Longrightarrow T_{\mu\nu} = -\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)}$$

となることを示せ。

III スピン接続係数と曲率形式

(i) テトラード e^a_μ を用いて表した正規直交基底 $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ は、演習**その５ III** の微分形式の言葉でいうと 1 形式になっている。e^a の外微分 de^a を dx^α を用いて表せ。

(ii) 前問の de^a に対し、スピン接続係数 $\omega^a{}_b$ を

$$de^a = -\omega^a{}_b \wedge e^b \tag{4}$$

によって定義する。$\omega^a{}_b$ も 1 形式である。

$$\omega^a{}_b = -e^a_{\mu;\nu} e^\mu_b dx^\nu \equiv \omega^a{}_{b\nu} dx^\nu \tag{5}$$

と表せることを示せ。

(iii) 前問の共変微分を取る際、a はただのラベルに過ぎないことに注意して、

$$\partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{c\mu} \omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu} \omega^c{}_{b\mu} = e^a_\lambda e^\alpha_b R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu} \tag{6}$$

となることを示せ。

(iv) 演習**その５ II(ii)** および**その５ III(ii)** に留意して、(6) は微分形式を用いて

$$d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e^c \wedge e^d \equiv R^a{}_b \tag{7}$$

と表すことができることを示せ。これを曲率 2 形式という。ここで、

$$R^a{}_{bcd} = e^a_\lambda e^\alpha_b e^\mu_c e^\nu_d R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu} \tag{8}$$

である。(8) が求まれば、そこから $R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu}$ を計算することは容易にできる。

演習**その７**で見るように、以上はリーマンテンソルの零でない成分を計算する便法を与えます。詳細は、Misner, Thorne, and Wheeler "Gravitation"（黒くて厚い本）の §14.5 や、Eguchi, Gilkey, and Hanson, Physics Reports **66**(1980)213 を勉強してみてください。なお、そこに出てくる捩率形式を本演習では、はじめから零としているので、スピン接続係数は (4) のように定義されることになっています。