

General Relativity homework No.5

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 5 月 23 日

0 第 3, 4 回演習の振り返り

0.1 第 3 回について

この回は特にコメントはありません。分量が多かったように思いますが、みなさんよく取り組んでいらっ
しゃいました。

0.2 第 4 回について

II の計算量が多く 1/2 の factor の存在の指摘までやり切れている人はかなり少なかったです。また、他の問
いも含め、少し雑になっているものでも「松」にしています。

1 A sample answer

Riemann tensor には次の表式もあって、添字に関する対称性が読み取りやすい。

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \right) + g_{\alpha\beta} (\Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\beta_{\nu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\beta_{\nu\rho}). \quad (1.1)$$

これは、Riemann tensor に関する既知の表式

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \quad (1.2)$$

に第 3 回の問題 IV で示した (i) と (ii) を用いると得られる (少々長い計算ののち)。

(i)

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\beta\alpha\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (g_{\delta\alpha,\gamma\beta} + g_{\gamma\beta,\gamma\alpha} - g_{\delta\beta,\gamma\alpha} - g_{\gamma\alpha,\delta\beta}) + g_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\delta\alpha} \Gamma^\mu_{\gamma\beta} - g_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} \Gamma^\lambda_{\delta\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{\delta\beta,\gamma\alpha} + g_{\gamma\alpha,\delta\beta} - g_{\delta\alpha,\gamma\beta} - g_{\gamma\beta,\delta\alpha}) + g_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\delta\beta} \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} - g_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\gamma\beta} \Gamma^\lambda_{\delta\alpha} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

(ii)

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\delta\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g_{\beta\gamma,\alpha\delta} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) + g_{\lambda\mu}\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\delta}^{\mu} - g_{\rho\lambda}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho}\Gamma_{\beta\delta}^{\lambda} \\
&= \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha,\gamma\beta} + g_{\gamma\beta,\delta\alpha} - g_{\delta\beta,\gamma\alpha} - g_{\delta\alpha,\beta\gamma}) + g_{\lambda\mu}\Gamma_{\delta\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\gamma\beta}^{\mu} - g_{\rho\lambda}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\rho}\Gamma_{\delta\beta}^{\lambda} \\
&= R_{\alpha\beta\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

(iii)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(g_{\delta\alpha,\gamma\beta} + g_{\gamma\beta,\gamma\alpha} - g_{\delta\beta,\gamma\alpha} - g_{\gamma\alpha,\delta\beta}) + g_{\lambda\mu}\Gamma_{\delta\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\gamma\beta}^{\mu} - g_{\rho\lambda}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\rho}\Gamma_{\delta\beta}^{\lambda}, \tag{1.5}$$

$$R_{\alpha\gamma\delta\beta} = \frac{1}{2}(g_{\beta\alpha,\delta\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta\alpha} - g_{\beta\gamma,\delta\alpha} - g_{\delta\alpha,\beta\gamma}) + g_{\lambda\mu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\delta\gamma}^{\mu} - g_{\rho\lambda}\Gamma_{\delta\alpha}^{\rho}\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}, \tag{1.6}$$

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\gamma\alpha,\beta\delta} + g_{\beta\delta,\gamma\alpha} - g_{\gamma\delta,\beta\alpha} - g_{\beta\alpha,\gamma\delta}) + g_{\lambda\mu}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\rho\delta}^{\mu} - g_{\rho\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^{\rho}\Gamma_{\gamma\delta}^{\lambda}. \tag{1.7}$$

以上を足せば

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \tag{1.8}$$

(iv) (ii) で示した $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ の両辺に $g^{\alpha\gamma}$ を掛けると $R^{\gamma}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}_{\delta\alpha\beta}$, よって $R_{\beta\delta} = R_{\delta\beta}$.

コメント

この問題でもしっかり手を動かしておきましょう。他の方法でも示せると思いますが、この解答例では、Riemann tensor の対称性が見通しやすい形に変形してから示しました。この議論は、フライシュバツハの「一般相対性理論」の 18 章を参考にしています。

2 A sample answer

Riemann テンソルの添字に関してなりたつ次の式

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \tag{2.1}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0 \tag{2.2}$$

を用いる。 n 次元時空において、 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は全部で n^4 個の成分があるが、添字に関する種々の制約 (2.1) と (2.2) があるために、これら全成分が独立というわけではない。まず (2.1) で $\beta = \alpha$ である成分について $R_{\alpha\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\alpha\gamma\delta}$, また $\delta = \gamma$ である成分について $R_{\alpha\beta\gamma\gamma} = -R_{\alpha\beta\gamma\gamma}$ だから

$$R_{\alpha\alpha\gamma\delta} = 0, \quad R_{\alpha\beta\gamma\gamma} = 0. \tag{2.3}$$

つまり、前 2 つあるいは後ろ 2 つの添字が同じ成分はすべて 0 である。

ここからは地道に場合分けを行ない、該当する添字の組み合わせ毎に独立な成分の数を求め、それらを最後に合計することで n^4 個の $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ のうちの独立な成分の数を算出する方針でゆく。

まず (i) すべての添字が異なるものについて。そのような成分は $nC_4 \times 4!$ 個ある。 nC_4 というのは添字の組 (順列ではない) の数であり、そのうちのひとつを固定する毎に添字の並びが $4!$ 通りずつあるという意味である。さて、添字の組 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ をひとつ固定したとき、固定された組に対して Riemann テンソルは $4! = 24$ 個あるが、たとえば $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ と等しいものが 8 個ある：

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\beta\alpha\delta\gamma} = -R_{\gamma\delta\beta\alpha} = R_{\delta\gamma\beta\alpha} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\delta\gamma\alpha\beta} \tag{2.4}$$

この中にはない $R_{\alpha\gamma\delta\beta}$ や $R_{\alpha\delta\beta\gamma}$ にも、同じように 8 個ずつ等しいものがある。そして $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R_{\alpha\gamma\delta\beta}$, $R_{\alpha\delta\beta\gamma}$ には (2.2) の関係があるから、これら 24 個のうち独立な成分は 2 個しかないことになる。よって (i) に該当する成分のうち、独立なものの数は

$${}_nC_4 \times 2 \quad \text{個.} \quad (2.5)$$

次に (ii) 4 個の添字のうち、2 個だけが同じものについて。このような成分は、添字の選び方が ${}_nC_3 \times 3$ 通りあり、そのそれぞれに対して添字 $\alpha, \alpha, \beta, \gamma$ ($\beta \neq \gamma$) の並びが 4×3 通りあるので、全部で ${}_nC_3 \times 4 \times 3$ 通りある。さて、添字の組 $(\alpha, \alpha, \beta, \gamma)$ をひとつ固定したとき、12 個の成分の内訳は：前 2 つ or 後ろ 2 つが同じものが $2 + 2 = 4$ 個、そうでないものが $12 - 4 = 8$ 個であり、前者がすべて 0 であることは上で見た。後者の 8 個については (2.1) 式から

$$R_{\alpha\beta\alpha\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\alpha} = R_{\beta\alpha\delta\alpha} = R_{\delta\alpha\beta\alpha} = -R_{\delta\alpha\alpha\beta} = R_{\alpha\delta\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\alpha\delta} = -R_{\alpha\delta\beta\alpha} \quad (2.6)$$

であるから、独立なものは 1 個しかない。したがって、(ii) に該当する成分のうち、独立なものの数は

$${}_nC_3 \times 3 \quad \text{個.} \quad (2.7)$$

次に、(iii) 4 個の添字のうち、2 つずつが同じものについて。4 個の添字の選び方が ${}_nC_2$ 通りあり、そのそれぞれについて添字の順列が ${}_4C_2$ 通りあるから、全部で ${}_nC_2 \times {}_4C_2$ 個ある。さて、添字の組 $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$ をひとつ固定したとき、 ${}_4C_2 = 6$ 個の成分の内訳は

$$R_{\alpha\alpha\beta\beta} = R_{\beta\beta\alpha\alpha} = 0, \quad R_{\alpha\beta\beta\alpha} = -R_{\alpha\beta\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\beta\alpha} = R_{\beta\alpha\alpha\beta} \quad (2.8)$$

である。よって、(iii) に該当する成分のうち、独立なものの数は

$${}_nC_2 \quad \text{個.} \quad (2.9)$$

その他、4 個の添字のうち 3 個が同じもの (${}_nC_2 \times 2 \times 4$ 個)、4 個とも同じもの (n 個) は、(2.3) 式によってすべて 0 である。

以上より、 n 次元時空において $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の n^4 個の成分のうち、独立であるものの数は

$$(2.5) + (2.7) + (2.9) = {}nC_4 \times 2 + {}nC_3 \times 3 + {}nC_2 = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) \quad \text{個.} \quad (2.10)$$

とくに 4 次元時空の場合、上式で $n = 4$ として独立な成分の数は 20 個である。

コメント

Riemann tensor の自由度は、その見た目とは裏腹に非常に少ないことを確認しました。様々な解法が考えられますが、ここでは着実な方法を取りました。

3 A sample answer

(i) 電磁ポテンシャル ϕ , $\mathbf{A}$ を用いて電場 $\mathbf{E}$ および磁場 $\mathbf{B}$ を表すと、よく知られているように

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.1)$$

である。ここに出てきた電磁ポテンシャルは 4 元ベクトルを成し、それはまた電荷・電流密度も同様であって

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (3.2)$$

この 4 元ポテンシャル A^μ を用いると、上の $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は次のように表すことができる：

$$E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i, \quad B_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (3.3)$$

(ii)

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} A_\lambda) - (\partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここに Christoffel 記号の添字に関する対称性 $\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を用いた。

(iii) 問題文の作用で $j^\mu = 0$ と置いた式

$$S = \frac{1}{c} \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.5)$$

これは $g_{\mu\nu}$ と A_μ の汎関数である。いま A_μ の方は一定として、 $g_{\mu\nu}$ に関する変分を行なうことを考える。このとき、 $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ は変化しないが、 $F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}$ は変化する。

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) + F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \quad (3.6)$$

である。まず第 2 項について。その 3 IV (i) と (iii) から $g^{\mu\nu}_{,\gamma} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta,\gamma}$ が導ける。これの変分については以下が成り立つ。

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta(g_{\alpha\beta}). \quad (3.7)$$

第 1 項については、その 3 IV (iv) で示した $g_{,\nu} = g g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu,\nu}$ の変分をとり

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta(g_{\alpha\beta}) \quad (3.8)$$

が成り立つ。(3.7) と (3.8) を (3.6) に使うと

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = 2 \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - F^\alpha_\nu F^{\beta\nu} \right) \sqrt{-g} \delta(g_{\alpha\beta}) \quad (3.9)$$

を得る。したがって、上の S を $g_{\mu\nu}$ について変分したものは

$$\delta S = -\frac{1}{2c} \int \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - F^\alpha_\nu F^{\beta\nu} \right) \sqrt{-g} \delta(g_{\alpha\beta}) d^4x \quad (3.10)$$

となるので

$$\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}(x)} = - \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - F^\alpha_\nu F^{\beta\nu} \right). \quad (3.11)$$

コメント

第 3 回の問題 IV で示した公式を適宜用いて、電磁場のエネルギー運動量テンソルが特殊相対論のもの一般化であることを確認しました。また、 $F_{\mu\nu}$ が接続に依らない量である (ii) というのは、以下の問いにも繋がる重要な事実です。

4 A sample answer

イ 4次元時空では, $p = 5$ 以上の微分形式は恒等的に 0 になる. なぜなら. $p = 5$ 次の微分形式 $\omega_{\mu\nu\lambda\rho\sigma}$ を考えると, 添字は 0, 1, 2, 3 のいずれかであるので, 5 つの添字のうちの少なくとも 2 つは同じである. いまそれが $\mu = \nu$ であるとする, これらの入れ替えに関して反対称であるから $\omega_{\mu\nu\lambda\rho\sigma} = -\omega_{\nu\mu\lambda\rho\sigma}$, よって $\omega_{\mu\nu\lambda\rho\sigma} = 0$. $p = 4$ 次以下ではこのようなことは必ずしも言えない.

ロ 完全反対称.

ハ, ニ スカラー場は $p = 0$ 次, ベクトル場は $p = 1$ 次の微分形式とみなす.

ホ 2 つの 1 次微分形式 ω, χ (成分 ω_μ, χ_ν) に対して, 外積

$$(\omega \wedge \chi)_{\mu\nu} = \frac{1}{1!1!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \omega_{\mu_{\sigma(1)}} \chi_{\mu_{\sigma(2)}} = \omega_\mu \chi_\nu - \omega_\nu \chi_\mu. \quad (4.1)$$

ヘ $p = q = 1$ なら, ホより $(-1)^1$. $p = 0, q = 1$ または $p = 1, q = 0$ なら $(+1) = (-1)^0$. 一般の p, q でも $(-1)^{n_1 n_2}$ の形になり, 指数部分には p と q の両方が入ることが予想される. $(-1)^{pq}$ はこのことと, 上に挙げた具体的な場合について矛盾しない. ちゃんとした証明の過程では, ウェッジ積の入れ替えを適当に行なう際に $(-1)^p \times \cdots \times (-1)^p = (-1)^{pq}$ あるいは $(-1)^q \times \cdots \times (-1)^q = (-1)^{pq}$ という因子が出てくる.

ト 問題文の定義式 (4) で $\chi = 1$ とおく (因子 $1/p!$ や $1/q!$ は和に関する重複度を補正するためのものである). ウェッジ積による基底をつけて

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (4.2)$$

(i) 微分形式 ω の微分 $d\omega$ (外微分) は, 次のように定義されている. すなわち, トで書いた

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (4.3)$$

に対して

$$d\omega = \frac{1}{p!} d\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \quad (4.4)$$

と定める. これは $p+1$ 次の微分形式となっている. 後の都合上 $d\omega$ には (共変微分ではなく) 偏微分を採用する.

(ii) $d^2\omega$ において全問より出てくる 2 階の偏微分項は添字の入れ替えについて対称. 一方, ウェッジ積の部分は定義より反対称であるから $d^2\omega = -d^2\omega$ を得る:

$$d^2\omega = 0. \quad (4.5)$$

(iii) ω を p 次の微分形式, χ を q 次の微分形式とすると:

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}, \quad \chi = \frac{1}{q!} \chi_{\nu_1 \dots \nu_q} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}, \quad (4.6)$$

これらの外積は

$$\omega \wedge \chi = \frac{1}{p!q!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \chi_{\nu_1 \dots \nu_q} (dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}) \wedge (dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}) \quad (4.7)$$

となる． よって

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \chi) &= \frac{1}{p!q!} \chi_{\nu_1 \dots \nu_q} d\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q} \\
&\quad + \frac{1}{p!q!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} d\chi_{\nu_1 \dots \nu_q} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q} \\
&= \frac{1}{p!q!} \chi_{\nu_1 \dots \nu_q} d\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q} \\
&\quad + \frac{1}{p!q!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} (-1)^p dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge d\chi_{\nu_1 \dots \nu_q} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q} \\
&= d\omega \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge d\chi.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

コメント

私は微分形式に詳しくないので有用なことは言えませんが、このあたりの議論は、数学や進んだ相対論の教科書で確認できると思います (例えば、佐々木さんの「一般相対論」、電話帳にも載っている). 特に重要なことは、ベクトルやテンソルの回転 (rot) は、接続に依らない操作であり、外微分という操作に対応しているということです.