

一般相対論演習その5 (横山)

2022年5月10日配布・5月23日提出締切・24日解答公開予定
(五月祭のため締切を一週間遅らせ、その6の締切と同日とします。)
<http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html>

- I **おさらい** リーマンテンソル $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\alpha} R^{\mu}_{\beta\gamma\delta}$, リッチテンソル $R_{\mu\nu} \equiv R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ について以下の等式が成り立つことを示せ。
- (i) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$
 - (ii) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$
 - (iii) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$
 - (iv) $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$
- II n 次元時空においてリーマンテンソルの独立な成分が何個あるか求めよ。
- III ミンコフスキー時空において、ヘビサイド単位 (**演習** その1 II を参照) で表したマクスウェル方程式は、作用関数

$$S = \frac{1}{c} \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^{\mu} A_{\mu} \right) d^4x, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad (1)$$

をゲージ場 (四元電磁ポテンシャル) A_{μ} について変分することによって得られる。添え字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ によって行う。

- (i) A_{μ} を用いて電場 $\mathbf{E}$ と磁場 (磁束密度のこと) $\mathbf{B}$ を表せ。また、四元電流密度 j^{μ} を電荷密度 ρ と電流密度ベクトル $\mathbf{j}$ を用いて表せ。

一般相対論でも、一般相対性原理により、局所慣性系においては上と同じことが成り立つ。それを一般の時空に拡張するには、座標変換を行えばよい。したがって、一般相対論における電磁気学の作用関数は

$$S = \frac{1}{c} \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^{\mu} A_{\mu} \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad F_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}, \quad (2)$$

と表されることになる。添え字の上げ下げは今度は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって行う。

- (ii) (2) において一般の曲がった時空でも、実は $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ が成り立っていることを確認せよ。
- (iii) この作用で $j^{\mu} = 0$ とした式の計量テンソルに関する変分を計算することにより、

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad (3)$$

が電磁場のエネルギー運動量テンソルの正しい表式を与えることを確認せよ。

裏に続く

IV 微分形式 以下の空欄を埋めながら説明を読んで問に答えよ。

IIIに出てきた $F_{\mu\nu}$ のように、反対称共変テンソル場は物理学のさまざまな局面で重要な役割を果たす。一般に、 p 階の共変テンソル場 ω は、その成分 $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$ が完全反対称、つまり任意の二つの添え字の入れ替えについて符号が変化するとき、 p 次微分形式あるいは p 形式 (p -form) と呼ばれる。4 次元時空では、イ 以上の微分形式は恒等的にゼロになり、イ -1 次の微分形式は、時空の各点で 演習 その 3 VI に出てきた ロ テンソルに比例することがわかる。便宜上、スカラー場と 1 階共変テンソル場は、それぞれ ハ 次及び ニ 次の微分形式と見なすことにする。

p 形式 ω と q 形式 χ から $p+q$ 階のテンソル場

$$(\omega \wedge \chi)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} \equiv \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \omega_{\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(p)}} \chi_{\mu_{\sigma(p+1)} \dots \mu_{\sigma(p+q)}} \quad (4)$$

を対応させることにすれば、微分形式の中で閉じた積演算を定義できる。ここで、 σ は 1 から $p+q$ までの数の置換、 $\text{sign}(\sigma)$ はその符号を表す。これを外積という。

例えば、2 つの 1 形式 ω, χ に対して、その外積は

$$(\omega \wedge \chi)_{\mu\nu} = \text{ホ}$$

となる。なお、0 形式 ϕ と 1 形式 ω に対しては、 $\phi \wedge \omega = \phi\omega$ と約束する。

外積は分配則と結合則は満たすが、交換則は一般には満たさず、 p 形式 ω と q 形式 χ の外積は

$$\omega \wedge \chi = \text{ヘ} \chi \wedge \omega$$

という関係を満たす。

一般に p 形式は座標基底 dx^μ を用いて

$$\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_p}$$

と表せるが、これは dx^μ の外積を用いると、(4) より

$$\omega = \text{ト} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (5)$$

と表すことができる。

- (i) 微分形式 ω の微分、すなわち外微分 $d\omega$ がどのように定義されるか調べ、その概要を述べよ。
- (ii) $d^2\omega = 0$ となることを説明せよ。
- (iii) ω を p 形式としたとき、

$$d(\omega \wedge \chi) = d\omega \wedge \chi + (-)^p \omega \wedge d\chi$$

が成り立つことを示せ。