

一般相対論演習その4 (横山)

2022年4月28日配布・5月9日提出締切・10日解答公開予定
<http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html>

- I **おさらい** 講義 (2.57) 式と同様の計算を行うことにより、反変ベクトルの二階共変微分が

$$A^\mu{}_{;\nu\sigma} - A^\mu{}_{;\sigma\nu} = -R^\mu{}_{\beta\nu\sigma} A^\beta \quad \text{講義 (2.58)}$$

を満たすことを示せ。

- II **測地線**は、一般の曲がった時空において二つの世界点 x_A, x_B を結ぶ距離が極値をとるような経路として定義される。このことを変分法で調べよう。すなわち、 x_A, x_B を結ぶ曲線の長さを微小線素 ds の積分として $I = \int_{x_A}^{x_B} ds$ とあらわし、これを最小化することを考える。世界点 x_A, x_B が因果関係を持てるよう、 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$ となるような時間的な経路の集積で表されるとして、経路上の各点はパラメタ λ によって指定されるとすると、

$$I = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (1)$$

と表すことができる。

- (i) λ としてとくに、 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ を満たすような固有時間 τ を取った場合、(1) を変分する問題は、

$$I = \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau \quad (2)$$

を変分する問題と等価であることを議論せよ。

- (ii) (2) を変分することにより、測地線方程式 講義 (3.13) が導かれることを示せ。

このことは、与えられた計量に対してクリストッフェル記号を計算する一つの便法を与える。これは特に対称性の高い時空で $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ の多くの成分が零になるような場合に威力を発揮する。

- (iii) ロバートソン・ウォーカー計量

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (3)$$

で与えられるような時空に対して、(2) を変分することにより、 $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ の零でないすべての成分を求めよ。 $a(t)$ は正定値な時間だけの関数、 K は定数とする。

- (iv) 前問で零でない結果の出た $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ に対して、公式

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\zeta} (g_{\nu\zeta,\sigma} + g_{\zeta\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\zeta})$$

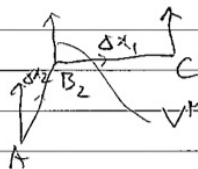
をそのまま計算して同じ結果が得られることを確かめよ。

$$V^\mu((x+\Delta x_1)+\Delta x_2)_{||} = V^\mu(x+\Delta x_1)_{||} - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x+\Delta x_1) V^\nu(x+\Delta x_1)_{||} \Delta x_2^\sigma + \Lambda_{qpr}^\mu(x+\Delta x_1) V^q(x+\Delta x_1)_{||} \Delta x_2^p \Delta x_1^r \quad (2.62)$$

$x \rightarrow x+\Delta x_1$
と変換される

と仮定する。 $x+\Delta x_1$ での Δx_2 は x の座標系で展開すると、2次までで

$$\begin{aligned} &= V^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \Delta x_1^\sigma + \Lambda_{qpr}^\mu V^q \Delta x_1^p \Delta x_1^r \\ &\quad - (\Gamma_{\nu\sigma}^\mu + \partial_3 \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Delta x_1^3) (V^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \Delta x_1^\beta) \Delta x_2^\sigma + \Lambda_{qpr}^\mu V^q \Delta x_2^p \Delta x_1^r \\ &= V^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \Delta x_1^\sigma + \Lambda_{qpr}^\mu V^q \Delta x_1^p \Delta x_1^r \\ &\quad - (\Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \Delta x_2^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \Delta x_1^p \Delta x_2^\sigma + \partial_3 \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \Delta x_1^3 \Delta x_2^\sigma) \\ &\quad + \Lambda_{qpr}^\mu V^q \Delta x_2^p \Delta x_1^r \quad \text{となる。} \quad (2.62') \end{aligned}$$



は C 上を平行移動した (2.62) の

$$\begin{aligned} (1) \quad V^\mu((x+\Delta x_2)+\Delta x_1)_{||} &= V^\mu(x+\Delta x_2)_{||} - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(x+\Delta x_2) V^\nu(x+\Delta x_2)_{||} \Delta x_1^\sigma \\ &\quad + \Lambda_{qpr}^\mu(x+\Delta x_2) V^q(x+\Delta x_2)_{||} \Delta x_1^p \Delta x_1^r \\ &= V^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \Delta x_2^\sigma + \Lambda_{qpr}^\mu V^q \Delta x_2^p \Delta x_1^r \\ &\quad - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \Delta x_1^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \Delta x_2^p \Delta x_1^\sigma - \partial_3 \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\nu \Delta x_2^3 \Delta x_1^\sigma \\ &\quad + \Lambda_{qpr}^\mu V^q \Delta x_1^p \Delta x_1^r \quad (2.63) \end{aligned}$$

差をとると (2.63) - (2.62')

$\beta \neq 3$ と仮定すると、第2項の差は0になる。
 3 と σ とは互いに独立。

$$V^\mu((x+\Delta x_2)+\Delta x_1)_{||} - V^\mu((x+\Delta x_1)+\Delta x_2)_{||}$$

$$= (\partial_3 \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\alpha 3}^\mu + \Gamma_{\nu 3}^\mu \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha 3}^\nu) V^\alpha \Delta x_1^3 \Delta x_2^\sigma$$

$$= R_{\alpha 3\sigma}^\mu V^\alpha \Delta x_1^3 \Delta x_2^\sigma \quad (2.64)$$

∇

反対称。