General Relativity homework No.4

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 5 月 8 日

1 A sample answer

$$A^{\mu}{}_{;\nu\sigma} - A^{\mu}{}_{;\sigma\nu} = (\boldsymbol{\nabla}_\sigma \boldsymbol{\nabla}_\nu - \boldsymbol{\nabla}_\nu \boldsymbol{\nabla}_\sigma)A^\mu = -R^{\mu}{}_{\beta\nu\sigma}A^\beta \tag{1.1}$$

を示したい．ここに

$$\boldsymbol{\nabla}_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}A^\rho, \tag{1.2}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} \tag{1.3}$$

である．(I) $\boldsymbol{\nabla}_\sigma \boldsymbol{\nabla}_\nu A^\mu$ を計算して，(II) 添字の入れ替えによって $\boldsymbol{\nabla}_\nu \boldsymbol{\nabla}_\sigma A^\mu$ を得て，(III) それらの差をとって所望の式を示す，という 3 つのステップを踏む.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_\sigma \boldsymbol{\nabla}_\nu A^\mu &= \boldsymbol{\nabla}_\sigma \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}A^\rho \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}A^\rho \right) + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}A^\rho \right) - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}A^\rho \right) \\
&= \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma}A^\rho + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}A^\rho - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}A^\rho .
\end{aligned} \tag{1.4}$$

つぎに，添字 σ と ν を入れかえて

$$\boldsymbol{\nabla}_\nu \boldsymbol{\nabla}_\sigma A^\mu = \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu}A^\rho + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\sigma}A^\rho - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}A^\rho . \tag{1.5}$$

以上 2 式の差をとれば

$$(\boldsymbol{\nabla}_\sigma \boldsymbol{\nabla}_\nu - \boldsymbol{\nabla}_\nu \boldsymbol{\nabla}_\sigma)A^\mu = -\left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho} \right)A^\rho = -R^{\mu}{}_{\rho\nu\sigma}A^\rho . \tag{1.6}$$

コメント

本問の結果を交換子の形で書くと, $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A^\mu = -R^\mu_{\nu\alpha\beta}A^\nu$ となります．電磁場の共変微分の非可換性は電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ で特徴づけられることを思い出すと, 偶然とは思えない関連がありますね．これらについてのまとめは須藤さんの教科書に詳しく載っています (”一般相対論入門” の表 3.1) ので確認してみてください.

2 A sample answer

- **弱重力の極限で $\tilde{L}$ が良く知っている Lagrangian となるためには $\tilde{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}$ とするべきだが ("$\frac{1}{2}$"が必要) ここではそれは省略されている．これに起因して (ii) と (iii) の結果には 2 倍分の差があるが，計算は問題文の通り行う．**

微小に離れた時間的な[*1] 2 点の線素 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ に関して，つぎの作用関数 I を変分することを考える．

$$I = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} \mathrm{d}s = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.1}$$

(i) (2.1) 式で変分 $\delta I = 0$ を考えると，Lagrangian を

$$L = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} = L(\{x^\mu\}, \{\dot{x}^\mu\}; \lambda) \tag{2.2}$$

として（ここで $\dot{x}^\mu := \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda$），$L$ はつぎの Euler–Lagrange 方程式をみたす：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{2.3}$$

パラメータ λ としてとくに固有時間 τ を選ぶと，

$$L = \mathrm{const.} \tag{2.4}$$

となる．対応する Euler–Lagrange 方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{2.5}$$

である．さて，別の作用積分

$$\tilde{I} = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau \tag{2.6}$$

を考えると，この Lagrangien と対応する Euler-Lagrange 方程式は

$$\tilde{L} = g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{2.8}$$

である．上に定義された τ に対して，(2.5) 式の成立と (2.8) 式の成立が同値であることを示す．

<u>(2.5) $\Rightarrow$ (2.8)</u>

[*1] ここでは時間的である場合を考えるが，空間的な場合も (符号が逆であることを除けば) 同様の方法で議論できる．しかし，ヌルの場合は常に $\mathrm{d}s^2 = 0$ であるため，本問の方法を適用することはできない．

まず $L^2=-\tilde{L}$ である．(2.5) 式の成立を仮定すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x^\alpha}&=-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L^2}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-\frac{\partial L^2}{\partial x^\alpha}\right]\\&=-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(2L\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-2L\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right]\\&=-\left[2\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}+2L\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right\}\right]\\&=0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

最後の等号において，仮定と，パラメータ λ としてとくに τ を選んだことによってなりたつ (2.4) 式をつかった．

(2.8) $\Rightarrow$ (2.5)

$\tilde{L}=-L^2$ だったので

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x^\alpha}\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L^2}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)+\frac{\partial L^2}{\partial x^\alpha}\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(2L\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right)+2L\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\\&=-2\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}-2L\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right].\end{aligned}\tag{2.10}$$

(2.4) 式があるので (2.5) 式がなりたつ．以上で (2.5) 式と (2.8) 式が等価であることが示せた．

(ii) $\tilde{L}$ に対する Euler–Lagrange 方程式 (2.8) に Lagrangian (2.7) を代入して測地線の方程式を得よう．$g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x^\mu)$ に注意して

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}^\alpha}=2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau},\quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\tag{2.11}$$

であるから

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x^\alpha}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\\&=2\frac{\mathrm{d}g_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}+2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\\&=2\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}+2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\\&=2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

両辺に $g^{\delta\alpha}/2$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\delta}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{1}{2}g^{\delta\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}+\frac{1}{2}g^{\delta\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}-\frac{1}{2}g^{\delta\alpha}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}=0.\tag{2.13}$$

第 3 項で $\beta \leftrightarrow \gamma$ を交換し，第 4 項で $(\mu,\nu) \to (\beta,\gamma)$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\delta}{\mathrm{d}\tau^2} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\delta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right)}_{\Gamma^\delta{}_{\beta\gamma}} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{2.14}$$

これより，測地線方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\delta}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\delta{}_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2.15}$$

が得られる．

(iii) Robertson–Walker 計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + a^2(t) \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - Kr^2} + r^2 (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) \right] \tag{2.16}$$

であり, 行列で表すと

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \frac{a^2}{1-Kr^2} & & \\ & & a^2 r^2 & \\ & & & a^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

である．ここでは, この時空に対する $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ の値を, $x^\alpha = ct,\ r,\ \theta,\ \phi$ の各成分に対して Euler–Lagrange 方程式を立て，そこから各 $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ の値を読みとることで求める．曲線を特徴づけるパラメータには固有時間 τ を用いると，(2.17) より[*2]

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \\ &= -c^2 \dot{t}^2 + \frac{a^2}{1-Kr^2} \dot{r}^2 + a^2 r^2 \dot{\theta}^2 + a^2 r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

これをもとにして，各成分について Euler–Lagrange 方程式を立てると

$$t \text{ 成分：} \quad c\ddot{t} + \frac{a(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t)/c}{1-Kr^2} \dot{r}^2 + \frac{a(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t) r^2}{c} \dot{\theta}^2 + \frac{a(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t) r^2 \sin^2\theta}{c} \dot{\phi}^2 = 0, \tag{2.19}$$

$$r \text{ 成分：} \quad \ddot{r} + \frac{2(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t)}{ca} (c\dot{t}) \dot{r} + \frac{Kr}{1-Kr^2} \dot{r}^2 - (1-Kr^2) r \dot{\theta}^2 - (1-Kr^2) r \sin^2\theta \dot{\phi}^2 = 0, \tag{2.20}$$

$$\theta \text{成分：} \quad \ddot{\theta} + \frac{2(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t)}{ca} (c\dot{t}) \dot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \dot{\phi}^2 = 0, \tag{2.21}$$

$$\phi \text{成分：} \quad \ddot{\phi} + \frac{2(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t)}{ca} (c\dot{t}) \dot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + \frac{2}{\tan\theta} \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \tag{2.22}$$

となる．これより，0 でない $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ の値をつぎの通り読みとることができる（$\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = a'$ とおく）：

$$\Gamma^0{}_{11} = \frac{aa'/c}{1-Kr^2}, \quad \Gamma^0{}_{22} = \frac{aa' r^2}{c}, \quad \Gamma^0{}_{33} = \frac{aa' r^2 \sin^2\theta}{c}, \tag{2.23}$$

$$\Gamma^1{}_{01} = \frac{2a'}{ca}, \quad \Gamma^1{}_{11} = \frac{Kr}{1-Kr^2}, \quad \Gamma^1{}_{22} = -(1-Kr^2) r, \quad \Gamma^1{}_{33} = -(1-Kr^2) r \sin^2\theta, \tag{2.24}$$

$$\Gamma^2{}_{02} = \frac{2a'}{ca}, \quad \Gamma^2{}_{12} = \frac{2}{r}, \quad \Gamma^2{}_{33} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \tag{2.25}$$

$$\Gamma^3{}_{03} = \frac{2a'}{ca}, \quad \Gamma^3{}_{13} = \frac{2}{r}, \quad \Gamma^3{}_{23} = \frac{2}{\tan\theta}. \tag{2.26}$$

[*2] (ii) と (iii) の結果を一致させるには, 以下の表式に $\frac{1}{2}$ をかける．

(iv) 前問では，Euler–Lagrange 方程式を立てて，そこから各 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ の値を読みとった．ここでは，計量 (2.17) と Christoffel 記号の定義

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\zeta}\left(\frac{\partial g_{\nu\zeta}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\zeta\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\zeta}}\right) \tag{2.27}$$

から直接，各 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ の値を算出する．ここで

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \frac{1-Kr^2}{a^2} & & \\ & & \frac{1}{a^2r^2} & \\ & & & \frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

である．さて，まず t 成分について

$$\Gamma^{0}{}_{11} = \frac{1}{2} g^{0\zeta}\left(\frac{\partial g_{1\zeta}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial g_{\zeta 1}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{\zeta}}\right) = -\frac{1}{2} g^{00}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{0}} = \frac{aa'/c}{1-Kr^2}, \tag{2.29}$$

$$\Gamma^{0}{}_{22} = \frac{1}{2} g^{0\zeta}\left(\frac{\partial g_{2\zeta}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial g_{\zeta 2}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^{\zeta}}\right) = -\frac{1}{2} g^{00}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{0}} = \frac{aa'r^2}{c}, \tag{2.30}$$

$$\Gamma^{0}{}_{33} = \frac{1}{2} g^{0\zeta}\left(\frac{\partial g_{3\zeta}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial g_{\zeta 3}}{\partial x^{3}} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{\zeta}}\right) = -\frac{1}{2} g^{00}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{0}} = \frac{aa'r^2\sin^2\theta}{c} \tag{2.31}$$

を得る．r 成分，θ 成分，ϕ 成分についても同様に計算すると

$$\Gamma^{1}{}_{01} = \frac{a'}{ca}, \quad \Gamma^{1}{}_{11} = \frac{Kr}{1-Kr^2}, \quad \Gamma^{1}{}_{22} = -(1-Kr^2)r, \quad \Gamma^{1}{}_{33} = -(1-Kr^2)r\sin^2\theta, \tag{2.32}$$

$$\Gamma^{2}{}_{02} = \frac{a'}{ca}, \quad \Gamma^{2}{}_{12} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{2}{}_{33} = -\frac{1}{2}\sin 2\theta, \tag{2.33}$$

$$\Gamma^{3}{}_{03} = \frac{a'}{ca}, \quad \Gamma^{3}{}_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{3}{}_{23} = \frac{1}{\tan\theta} \tag{2.34}$$

を得る．

コメント

(i) では, 四元距離の変分問題 ($L = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda}}$) と, 保存力下の質点系の Lagrangian=(運動エネルギー)-(ポテンシャルエネルギー) の類推から $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda}$ とした[a] 変分問題が等価であることを示しました. これにより, 問題文中にあるように**具体的なメトリックの形とその座標依存性が分かっていれば, 測地線方程式を変分原理から書き下して係数を読み取ることで Christoffel 記号の成分が得られる**ことが分かります. これが (ii) と (iii) の趣旨です. この方法は特に, 高い対称性を持つ時空において威力を発揮します.

[a] 古典力学の場合と比較すると, 静止質量が現われていないが重力場中を運動する質点の運動はこれに依らない (等価原理の着想) ためと解釈できる. また, $g_{\mu\nu}$ が重力ポテンシャルの情報に他ならないため”運動エネルギー”に対応した 1 つの項で書ける.