General Relativity homework No.3

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 5 月 8 日

0　第 2 回演習の振り返り

0.1　1 について

様々な切り口の解答が見られましたが, きちんと議論できているものは正答としています. 問題文にあるように, 2 つの系での加速度を丁寧に比較してやるのが最良だと思われます. 本問の物理的な意味については, コメントしてあるのでぜひ確認してみてください (非常に重要だと思います).

0.2　2 について

- (i) のポイントは, メトリックの変換則を式を逐次近似を行うことで所望の次数まで計算することです. これがきちんと議論できている解答を高く評価しています. $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}$ を $(1+x)^{-1} \simeq 1-x$, for small x を使って計算しているものも OK です.
- テンソルの成分計算で $1/A^\mu$ のように割り算をして計算しているものがありました. このようにすると, テンソルの変換性がより見えにくくなるので避けたほうが良いです.
- (ii) では, 自由度の勘定がきちんとできていない解答が多かったです. A を使って $\tilde{\partial}_\mu \tilde{\partial}_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta}$ の全成分を 0 にしようとしている解答も多かったですが, 問題文上このようにくみ取れなくもないので正答としています.

0.3　3 について

皆さんよくできていらっしゃいました. 授業の内容に沿って解答しているものは正答です. また, 何人かの方が指摘してくれているようにテンソルの定義自体が問題文で与えられているようなものなので, (少し混乱するとは思いますが) 問題文通り”確認”すれば OK です.

1 A sample answer

反変ベクトル A^μ，共変ベクトル A_μ の共変微分はそれぞれ

$$A^\mu{}_{;\alpha} = \boldsymbol{\nabla}_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} A^\sigma, \quad A_{\mu;\alpha} = \boldsymbol{\nabla}_\alpha A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} A_\sigma. \tag{1.1}$$

この変換性を示すに際して，反変・共変ベクトルの変換性

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu, \quad A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} A^\nu, \tag{1.2}$$

および，Christoffel 記号の変換性

$$\Gamma'^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu x'^\rho} \tag{1.3}$$

を念頭に置いておく．

(i)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}'_\alpha A'^\mu &= A'^\mu{}_{;\alpha} \\
&= A'^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma'^\mu{}_{\sigma\alpha} A'^\sigma \\
&= \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\alpha} + \Gamma'^\mu{}_{\sigma\alpha} A'^\sigma \\
&= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \right) + \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha} \Gamma^\lambda{}_{\gamma\delta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\sigma \partial x'^\alpha} \right] \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu \\
&= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\nu} A^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\beta} \right) + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma^\lambda{}_{\gamma\delta} A^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\sigma \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu \\
&= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\nu} A^\nu + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu{}_{,\beta} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha} \Gamma^\lambda{}_{\gamma\delta} A^\gamma + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\sigma \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\nu} A^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\sigma \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

後ろの 2 項について

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\nu} A^\nu &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) A^\nu \\
&= \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) A^\nu \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) A^\nu \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^\mu{}_\alpha \right) A^\nu \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\sigma \partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}A^\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\right)\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}A^\nu \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\right)A^\nu \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\nu}\right)A^\nu \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\delta^\lambda{}_\nu\right)A^\nu \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

以上より

$$
A'^\mu{}_{;\alpha} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}A^\nu{}_\beta. \tag{1.7}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}'_\alpha A'_\mu &= A'_{\mu;\alpha} \\
&= A'_{\mu,\alpha} - \Gamma'^\sigma{}_{\mu\alpha}A'_\sigma \\
&= \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\alpha} - \Gamma'^\sigma{}_{\mu\alpha}A'_\sigma \\
&= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu\right) - \left[\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\gamma\delta} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha}\right]\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\sigma}A_\nu \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x'^\mu}A_\nu + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\rho}\right) - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\Gamma^\lambda{}_{\gamma\delta}A_\nu - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}A_\nu \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^\rho \partial x'^\mu}A_\nu + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}A_{\nu,\rho} - \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\gamma\delta}A_\lambda - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\sigma}A_\nu \\
&= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^\rho \partial x'^\mu}A_\nu - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}A_\nu \\
&= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}A_{\nu;\rho} + \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^\rho \partial x'^\mu}A_\nu}_{\partial/\partial x'^\alpha(\partial x^\nu/\partial x'^\mu)A_\nu} - \underbrace{\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}A_\nu}_{(\partial^2 x^\nu/\partial x'^\mu \partial x'^\alpha)A_\nu} \\
&= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}A_{\nu;\rho}.
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

2 A sample answer

その 2 問 II の結果：

$$
\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}A^\mu{}_{\nu\lambda}x^\nu x^\lambda + \mathcal{O}(|x|^3), \tag{2.1}
$$

$$
\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 0 \cdot \tilde{x}^\lambda + \mathcal{O}(|\tilde{x}|^2). \tag{2.2}
$$

ここで

$$
A^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\mu}\left(\left.\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu}\right|_{x=0} - \left.\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\right|_{x=0}\right) \tag{2.3}
$$

である．一方

$$
g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + x^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}(0) + \mathcal{O}(|x|^2) \tag{2.4}
$$

だったから，$g_{\mu\nu}\big|_{x=0} = \eta_{\mu\nu}$．したがって

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\mu}\Big(\frac{\partial g_{\rho\ \ \nu}}{\partial x^{\lambda}}\Big|_{x=0} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}}\Big|_{x=0} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\Big|_{x=0}\Big) \tag{2.5}$$

であるから，もし $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}$ であれば，これを $A^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ として採用することができる．以上で示された．

コメント

一般に”平行移動”を定義する $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ は, 接続 (Christoffel 記号と区別するため $C^{\mu}_{\alpha\beta}$ と書かれることが多い) と言われる量であり時空へ付与される新たな構造です．接続の導入にはある程度の任意性[a]がありますが, 一般相対論では時空の各点で局所 Lorentz 系が取れることを要請する (等価原理) ため, 接続の下付き添え字について対称性が課されます．これに加え, さらに $\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0$ を課すことで, 我々が良く知る Christoffel 記号の表式が得られます.

[a] 具体的には, ” 平行移動” したベクトルがきちんとベクトルの変換性を満たす範囲で任意性がある．また, 必須ではないが, 通常はベクトルのノルムが保存することも要請する.

3　解答例

正則実対称行列 M の次元を d とし，d 個の固有値を $m_1, m_2, \ldots, m_d$ とする．M を対角化する基底で考えることにしてよい：

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_d \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

すると

$$\log(\det M) = \log\left(\prod_{i=1}^{d} m_i\right) = \sum_{i=i}^{d} \log m_i. \tag{3.2}$$

以上が示すべき式の左辺．右辺については，行列についての指数関数についての定義と同様に

$$\log(E+X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n \tag{3.3}$$

を使うことを考えると，$M = E + A$ とおいて

$$\log M = \log(E+A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (M-E)^n. \tag{3.4}$$

ここで

$$(M-E)^n = \begin{pmatrix} m_1 - 1 & & & \\ & m_2 - 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_d - 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (m_1 - 1)^n & & & \\ & (m_2 - 1)^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & (m_d - 1)^n \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\log M &= \operatorname{Tr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(M-E)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(m_i-1)^n\right] \\ &= \sum_{i=1}^{d}\log[1+(m_i-1)] \\ &= \sum_{i=1}^{d}\log m_i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

よって

$$\log(\det M) = \operatorname{Tr}\log M. \tag{3.7}$$

コメント

線形代数の問題ですね．指数行列の性質を使った公式は, 物理の各所で登場する印象があるので確認してみてください (院試でも頻出な気がします).

4 A sample answer

(i) $g_{\alpha\beta}$ が共変的に一定であるという式[†1]

$$0 = g_{\alpha\beta;\gamma} = \boldsymbol{\nabla}_\gamma g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\gamma} g_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma} g_{\alpha\lambda} \tag{4.1}$$

から

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda{}_{\alpha\gamma} g_{\lambda\beta} + \Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma} g_{\alpha\lambda} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}. \tag{4.2}$$

ここで

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma}. \tag{4.3}$$

とした.

(ii)

$$0 = \boldsymbol{\nabla}_\gamma g^{\mu\beta} = g^{\mu\beta}{}_{;\gamma} = g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma} g^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta{}_{\lambda\gamma} g^{\mu\lambda} \tag{4.4}$$

より

$$g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = -\Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma} g^{\lambda\beta} - \Gamma^\beta{}_{\lambda\gamma} g^{\mu\lambda}. \tag{4.5}$$

この時点で (iii) が先に示された．したがって左辺は

$$g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = g_{\alpha\mu}(-\Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma} g^{\lambda\beta} - \Gamma^\beta{}_{\lambda\gamma} g^{\mu\lambda}) = -g^{\lambda\beta}\Gamma_{\alpha\lambda\gamma} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma}. \tag{4.6}$$

一方，右辺は

$$-g^{\mu\beta} g_{\alpha\mu,\gamma} = -g^{\mu\beta}(\Gamma_{\mu\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\mu\gamma}) = -g^{\mu\beta} g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} - g^{\mu\beta}\Gamma_{\alpha\mu\gamma} = -\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} - g^{\mu\beta}\Gamma_{\alpha\mu\gamma} \tag{4.7}$$

なので，示された.

[†1] このメトリックの性質は, 相対論界隈では metricity(メトリシティ) と呼ばれている．直接的には metricity は, $\boldsymbol{\nabla}_\gamma\left(g_{\alpha\beta}A^\mu\right) = \left(\boldsymbol{\nabla}_\gamma g_{\alpha\beta}\right)A^\mu + g_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{\nabla}_\gamma\right)A^\mu = g_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{\nabla}_\gamma A^\mu\right)$ のように, 共変微分に際して $g_{\alpha\beta}$ が定数のように振る舞う性質を指す.

(iii) (ii) 中で示された．

(iv) 問題 3 で得られる式 $\log(\det M) = \mathrm{Tr}\log M$ の両辺に対して, $M_{\alpha\beta}$ についての変分を取る．まず左辺は $\delta\log(\det M)$ であり, 左辺は $\mathrm{Tr}\log\bigl(M^{-1}\delta M\bigr)$ となる．特にこの行列 M として $g_{\alpha\beta}$ をとると

$$\delta\log(\det g_{\alpha\beta}) = g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \tag{4.8}$$

これより

$$\frac{\partial\log g}{\partial x^\alpha} = g^{\beta\gamma}\delta g_{\beta\gamma,\alpha}\,. \tag{4.9}$$

したがって

$$g_{,\alpha} = g g^{\beta\gamma}\delta g_{\beta\gamma,\alpha} \tag{4.10}$$

(ii) を用いることで最右辺も示される．

(v) 示すべき式の右辺で微分を実行すると $(1/2g)\partial g/\partial x^\beta$ となる．(iv) および (iii) で示した結果をつかってこれを変形していくと

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2}g_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} = -\frac{1}{2}g_{\beta\gamma}(-\Gamma^\beta{}_{\lambda\alpha}g^{\lambda\gamma} - \Gamma^\gamma{}_{\lambda\alpha}g^{\lambda\beta}) = \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\alpha}) = \Gamma^\lambda{}_{\lambda\alpha}. \tag{4.11}$$

(vi) これも右辺の変形によって示す．具体的には上と同様に，微分を実行してから (iii) および (v) で示した結果を用いて

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\bigl(g^{\alpha\nu}\sqrt{-g}\bigr) &= -g^{\alpha\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{2g}g^{\alpha\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} \\ &= \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\nu}g^{\mu\alpha} - g^{\alpha\nu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu} \\ &= \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

(vii) これも右辺の変形によって示す．途中で (v) で示したことをつかって

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}P^\alpha)_{,\alpha} = \frac{\partial P^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}P^\alpha = \frac{\partial P^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\alpha}P^\alpha = P^\alpha_{;\alpha}. \tag{4.13}$$

(viii) やはりまず右辺を変形してゆく．途中で (v) で示したことをつかって

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta})_{,\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + A^{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\beta}A^{\alpha\beta}. \tag{4.14}$$

一方，左辺は

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}A^{\gamma\beta} + \Gamma^\beta{}_{\beta\gamma}A^{\alpha\gamma} \tag{4.15}$$

であるが，条件 $A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$ をつかうと，この真ん中の項は

$$\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}A^{\gamma\beta} = -\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}A^{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}A^{\beta\gamma} = -\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}A^{\gamma\beta} \tag{4.16}$$

だから，0．よって示された．

(ix) これは右辺と左辺の両方から変形してゆく．まず右辺について

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta})_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} + g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}$$
$$= \Gamma^\lambda{}_{\lambda\alpha}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} + (-\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}g^{\mu\beta} - \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}g^{\mu\alpha}) + g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}$$
$$= -g^{\lambda\alpha}\Gamma^\beta{}_{\lambda\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} + g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}. \tag{4.17}$$

一方，左辺は

$$g^{\alpha\beta}\boldsymbol{\nabla}_\alpha\boldsymbol{\nabla}_\beta\phi = g^{\alpha\beta}\boldsymbol{\nabla}_\alpha(\partial_\beta\phi)$$
$$= g^{\alpha\beta}\Big[\partial_\alpha(\partial_\beta\phi) - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}(\partial_\gamma\phi)\Big]$$
$$= g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\phi - g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}\partial_\gamma\phi \tag{4.18}$$

だから，示された.

コメント

ここでは手をしっかり動かしておきましょう．すると, 今後の計算もかなりスムーズに進められると思います．また, このあたりの参考文献は, "A relativists' toolkit"(E.Poisson) が個人的におススメです.

5 A sample answer

反対称テンソル

$$F_{\mu\nu} = \boldsymbol{\nabla}_\mu A_\nu - \boldsymbol{\nabla}_\nu A_\mu = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \tag{5.1}$$

は，座標変換に伴って，次のように変換する：

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}F_{\rho\sigma}. \tag{5.2}$$

したがって，座標系 (x^μ) で $F_{\mu\nu} = 0$ ならば，座標系 (x'^μ) で $F'_{\mu\nu} = 0$ である.

コメント

より一般に, **あるテンソルがある座標系で零テンソルならば，そのテンソルはどの座標系でも零テンソルである**と言うことができます.

6 A sample answer

(i) 計量テンソル $g_{\mu\mu}$ の変換

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta} \tag{6.1}$$

の両辺の determinant を取ると

$$
\begin{aligned}
g' &= \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}\right) \\
&= \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\det\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\right)g \\
&= J^2 g.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

ここで J はこの座標変換での Jacobian であり,

$$
J = \sqrt{\frac{-g'}{-g}} \tag{6.3}
$$

となることが分かる. 一方, 体積要素の変換は

$$
\mathrm{d}^4x' = J^{-1}\mathrm{d}^4x \tag{6.4}
$$

であるから, これに (6.3) を代入すると

$$
\sqrt{-g'}\mathrm{d}^4x' = \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x \tag{6.5}
$$

となり, これが座標に依らない四元体積要素である.

(ii) まず,

$$
\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\delta'}} \tag{6.6}
$$

という量を考える. ここで新しい座標 $\{x'^\mu\}$ を $\{x^{\mu'}\}$ のように書いていることに注意する. するとこの量も $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ の入れ替えについて, ϵ と同じ反対称性を持つので, ある比例定数 λ を用意して

$$
\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\delta'}} = \lambda\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \tag{6.7}
$$

と書くことができる. そして特に $\alpha'\beta'\gamma'\delta' = 0123$ とすると

$$
\lambda\epsilon_{0123} = \lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{3'}} = J. \tag{6.8}
$$

ここで (6.8) の中辺が, $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$ の行列式に他ならないことを用いた. したがって

$$
\sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\delta'}} = \sqrt{-g'}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \tag{6.9}
$$

となって $E_{\mu\nu\lambda\sigma} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ が 4 階の共変テンソルとして振る舞うことが示された.

(iii) ここでも (ii) と似た議論をする. まず

$$
\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\sigma} \tag{6.10}
$$

という量を導入する. 今回は λ' という比例定数を用意し

$$
\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\sigma} = \lambda'\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \tag{6.11}
$$

と書く. $\alpha'\beta'\gamma'\delta' = 0123$ とすると

$$\lambda' = J^{-1} \tag{6.12}$$

すると $E^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ が 4 階の反変テンソルとして振る舞うことが分かる.

(iv) メトリック g で E の添え字の上下ができるとして, 具体的な成分 E_{0123} 計算してみることで確かめる

$$\begin{aligned} E_{0123} &= g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{3\delta}E^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{3\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\,(-g) \\ &= \sqrt{-g}\epsilon_{0123}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

特に, この 3 式目で $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ が $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ と逆の符号なのが効いている.

コメント

本問に関連した議論は先ほどと同様, ” A relativists’ toolkit” (E.Poisson) の第 1 章が個人的におススメです. ”場の古典論”の特殊相対論の部分にも載っていたと思います. **ここでのポイントは, 添え字に関する反対称性が分かっていればあとは比例定数を求めることに注力すれば良いということです.** これは Levi-Civita 記号が出てきたときによく使える技です. また, 今回の演習の 4 や 6 の結果は, 曲がった時空における Gauss の定理や Stokes の定理の導出において非常に重要な役割を果たします.