一般相対論演習その３（横山）

2022 年 4 月 26 日配布・5 月 9 日提出締切・10 日解答公開予定
http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html

I　ベクトルの共変微分について、クリストッフェル記号の変換性 講義(2.42) を用いることによって、以下の問いに答えよ。

(i)　反変ベクトルの共変微分 $A^{\mu}{}_{;\alpha} = A^{\mu}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha} A^{\sigma}$ が二階混合テンソルとして変換することを示せ。

(ii)　共変ベクトルの共変微分 $A_{\mu;\alpha} = A_{\mu,\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} A_{\sigma}$ が二階共変テンソルとして変換することを示せ。

II　**その２**問 II の結果を用いることにより、クリストッフェル記号が対称性 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$ を満たすならば、任意に選んだ原点において局所慣性系をとれることを示せ。

III　任意の正則実対称行列 M に対し、公式 $\log \det M = \mathrm{Tr} \log M$ が成り立つことを示せ。

IV　以下の等式が成り立つことを計算によって示せ。但し、$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}$ とし、g は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式を表すものとする。P^{α} はベクトル、$A^{\alpha\beta}$ はテンソル、ϕ はスカラーである。また、一般に $A_{,\lambda} \equiv \partial_{\lambda} A$ とする。

(i)　$\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$　**(ii)**　$g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\mu\beta} g_{\alpha\mu,\gamma}$

(iii)　$g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} g^{\mu\alpha}$　**(iv)**　重要 $g_{,\alpha} = -g g_{\beta\gamma} g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} = g g^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma,\alpha}$

(v)　$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \partial_{\beta} \log \sqrt{-g}$　**(vi)**　$g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} (g^{\alpha\nu} \sqrt{-g})_{,\nu}$

(vii)　重要 $P^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} P^{\alpha})_{,\alpha}$

(viii)　$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$ のとき、$A^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^{\alpha\beta})_{,\beta}$

(ix)　重要 $\Box\phi \equiv \phi_{;\alpha}^{;\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta})_{,\alpha}$

V　おさらい 共変ベクトル A_{μ} に対し $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}$ という量を定義すると、**その３**問 **I(ii)** より、これは 2 階共変テンソルとして変換する。ある座標系においてどの世界点でも $F_{\mu\nu} = 0$ が成り立つならば、いかなる座標系においても恒等的に $F_{\mu\nu} = 0$ となることを説明せよ。（$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}$ の導出において使用した。）

VI　計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式を g とする。また、一般座標のもとで添え字に関して完全反対称で、$\epsilon_{0123} = 1$ となる 4^4 個の定数関数の組 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ を考える。（たとえば、$\epsilon_{0012} = 0,\ \epsilon_{1023} = -\epsilon_{1203} = -1$ という値を取る。）同様に、$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ も完全反対称な定数関数の組で、$\epsilon^{0123} = -1$ となるものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(i)　$\sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g} d^4x$ が座標変換に対して不変な四元体積要素を与えることを示せ。

(ii)　$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ が共変テンソルになることを示せ。

(iii)　$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ は反変テンソルとなることを示せ。

(iv)　$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ と $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ は互いに計量テンソルによる添え字の上げ下げで移り合うことを示せ。