

General Relativity homework No.2

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 4 月 22 日

0 第 1 回演習の振り返り

0.1 成績評価について

松竹梅の順に 3 段階でつけています。松はほぼ全問正答、竹は何か 1 つ間違い (他の問題が良くできていた場合は 2 つ間違えていてもこの評価にしています)、梅は 2 つ以上間違いといった感じです。これは事前に割合を決めているものではないので、全員が満点なら全員”松”ですし逆も然りです。今後もこのような基準で成績をつけさせていただきます。

0.2 1 について

- 世界間隔 ds^2 は、採用する慣性系に依らず純粋に 2 つの事象間のみで決まるスカラーなので、答えとしては、**A,B が空間的に隔たった事象であれば良い**というものが最も簡潔ですが、座標系に依存した形式、例えば

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 > 0 \quad (0.1)$$

のままのものも当然正解です。これと似た議論をしている解答が最も多かったです。

- 光円錐を用いて数式を用いることなく適切に条件を明示している解答もいくつかありました。これらも当然正答ですしなんなら解答例よりも簡潔です。
- 不等式に等号を含めている解答が割とありました。きちんと論理が展開されていれば減点対象にはしていませんが、Lorentz boost を用いての議論でもこれは不適切であり、私と同様の議論をしている場合は A,B が異なる事象としているため等号はつきません。
- 題意を満たす Lorentz boost v の表式を求めて答えとしているものもまづまづありました。しかし、今回問われているのはこのような v が取れるような A,B それ自体の条件なのでこれだとあと一歩議論が足りていません。

0.3 2,3 について

こちらは多くの方ができていらっしゃいました (3 はむしろこちらの解答がラフすぎたかも...)。不明点がある方は電磁気や特殊相対論の教科書、線形代数の教科書で確認してみてください。また 2 について” A^μ, j^μ に共変性を仮定せずに Maxwell 方程式を示す方法があるか? (広い意味ではなんの量にも共変性を課さずにこれらを示せるか)”という質問を頂きました。私が知りうる限りでは、Maxwell 方程式の共変性を示すためには

これらの要請が必要、もしくは方程式系の共変性を要請して A^μ, j^μ の共変性を示すという 2 パターン (sample answer の注釈 3) なのですが、これではこの質問には明確に答えられていません。なので、もしご存じの方がいらっしゃるればご一報ください。

0.4 4 について

4 はお題がざっくりとしているために、様々な切り口の解答が見られました。どのように切り込んでもらっても構わないのですが重要なのは、**相対論的に不変な等加速度運動とはどういうことか**を適切に解釈していることです。しかし、4 元加速度 $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$ の変換則の議論から等加速度運動を議論するのはとても骨が折れるはずで、そこで 4 元加速度を特徴づけるスカラー $a^\mu a_\mu = a^2$, a : positive constant を構成してやり、それを質点の静止系で評価してやるというのが最も見通しがよいと思います。これを素直に理解してやると、向きには注意を払っていないがその”絶対値”は一定ということですね。そして x 軸に沿った等加速度運動に限ってやればこの a は質点の静止系での加速度になっていますから、先週載せたものが答えになります。本問については”場の古典論”第 1 章 § 7 の問題、4 元加速度の変換則については”相対性理論”(江沢洋、裳華房) などに載っています。理物の H28 年度の院試 3 もこれに関する問いです。なにはともあれ、静止系で議論しており正答に行き着いているものは正解としています。

- 少なかったですが、これが正しく行えている解答を高く評価しました。
- 3 元加速度 (空間成分のみ) を取り出して議論している解答もありました。4 元で議論するときれいに書けるのでこっちのほうが見通しが良いです。
- 等加速度運動を自身で明示的に定義し物理的に間違いのない議論を進めていたものは正答としています (問い自体がざっくりしていたため)。
- 一部の答案で特殊相対論では加速度運動が議論できないとの旨のものがありません。例えば、光速に近い速度で電磁場中を動く物体は特殊相対論の枠組みで扱われます。
- 一般相対論の指導原理である等価原理との関連を議論しているものもありましたが、局所的に重力の寄与を消すことのできる局所 Lorentz 系の存在は重力特有のものなので一般性を欠いた議論です。

また、”解答例にある’速度が常に 0 であるのに加速度が一定となる座標系’というのは矛盾しているようだがどうなっているのか?”という質問を頂きました。これは速度が常に 0 となる座標系に常に移り続けているという意味です。ある慣性系において、時刻 t で物体の速度が 0 であるが加速度が a であるとします。この次の瞬間の時刻 $t + dt$ にはこの座標系では、物体の速度は $v(t + dt) = a dt$ となるはずで、次がポイントなのですが、ここでさらに $v = 0$ となる新しい慣性系に移ることができます。これは $v = a dt$ をこの瞬間には一定と見なし Lorentz boost を考えることで達成されます。この手続きを何度も繰り返すことで、(一見矛盾する) 速度が 0 だが加速度が一定である座標系を各瞬間毎で構成できるようになるわけです。そしてこの系は物体の静止系に他ならないため、解答例ではこのような表現を用いました。これについては Schutz の相対論入門 1 の 2.3 あたりに詳しく載っています。

1 A sample answer

以下の座標変換で新しく $\{x'^\mu\}$ を導入する．これは題意を満たす空間座標のみの一般的な座標変換である．

$$x'^j = X^j(x^i, t), \quad t' = t \quad (1.1)$$

これに対して加速度 a' を計算すると

$$\begin{aligned} a'^j &\equiv \frac{d^2 x'^j}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2} X^j(x^i, t) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial X^j}{\partial t} \right] \\ &= \frac{dx^i}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \right] + \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial X^j}{\partial t} \right) \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X^j}{\partial t} \right) \\ &= \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^k \partial x^i} \frac{dx^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial^2 X^j}{\partial t \partial x^i} + \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^i \partial t} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial^2 X^j}{\partial t^2} \\ &= v^i v^k \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^k \partial x^i} + v^i \frac{\partial^2 X^j}{\partial t \partial x^i} + a^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^i \partial t} + \frac{\partial^2 X^j}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 X^j}{\partial t^2} + a^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + 2v^i \frac{\partial^2 X^j}{\partial t \partial x^i} + v^i v^k \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^k \partial x^i}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

これが任意の速度 $v^i \equiv dx^i/dt$ について 0 となるときの

$$\frac{\partial^2 X^j}{\partial t^2} + a^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 X^j}{\partial t \partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^k \partial x^i} = 0. \quad (1.4)$$

最初の式を両辺 x^k で微分して、残りの 2 式を使うと

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^k} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} = 0 \quad (1.5)$$

を得る．もし $\partial X^j / \partial x^i$ が 0 だと Jacobian が 0 となり座標変換として意味を成さない．よって

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^k} = 0. \quad (1.6)$$

つまり巧い座標変換を用いて”重力”を消すことが出来るのは、もとの加速度 a^i が空間的に一様であるときに限られる．

コメント

この結果は非常に重要な事実を主張しているので note しておきます．

まず一般的な Newton 重力を考えてみることにすると、これは大域的に見れば空間的に一様ではありません．重力源に近づけば作用する力は大きくなりますし遠ざかれば小さくなっていきますよね (そして重力が中心力であることにより引き起こされるのが潮汐力でした)．したがって重力加速度が空間的に一様なのは重力場を十分局所的に見たときだけです (c.f. 重力加速度 g)．これを踏まえると今回の結果は、空間的に一様な加速度であれば適切な座標変換で”重力”を消せるということを言っているわけですから、**十分小さく限られた領域では重力は消すことが出来る**という等価原理へと繋がります．これについてのきちんとした表現は次の問いでより詳しく見ることになります．本問に関連する議論は、”場の古典論” § 81,82 や”一般相対論 (内山龍雄)”の第 1 章など様々な文献で確認できます．

2 A sample answer

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + x^\lambda \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right|_{x=0} + \mathcal{O}(|x|^2), \quad (2.1)$$

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2} A^\mu{}_{\nu\lambda} x^\nu x^\lambda + \mathcal{O}(|x|^3), \quad (2.2)$$

と用意しておく．上側の式はもとの座標系での計量の Taylor 展開，下側の式は座標変換を定義する式．

(i) メトリック g は 2 階の共変テンソルなので，座標変換 (2.2) に際して以下のように変換される．

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

これを見ると，まず $\partial x^\alpha / \partial \tilde{x}^\mu$ を $\tilde{x}^\mu$ で表す必要がある．そのためには (2.2) を x^μ について逆解きすればよいが，2 次の精度までを考える上では (2.2) の第 2 項に現れる x^μ を単に $\tilde{x}^\mu$ に置き換えればよい．これに注意すれば，

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu - \frac{1}{2} A^\mu{}_{\nu\lambda} \tilde{x}^\nu \tilde{x}^\lambda + \mathcal{O}(|\tilde{x}|^3) \quad (2.4)$$

となるので

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} = \delta^\alpha_\mu - A^\alpha{}_{\mu\lambda} \tilde{x}^\lambda. \quad (2.5)$$

ここで係数 A が下付き添え字について対称であることを用いた．準備が整ったので (2.4) 式と (2.5) 式を (2.3) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= (\delta^\alpha_\mu - A^\alpha{}_{\mu\lambda} \tilde{x}^\lambda)(\delta^\beta_\nu - A^\beta{}_{\nu\lambda} \tilde{x}^\lambda) \left(\eta_{\alpha\beta} + x^\lambda \left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right|_{x=0} \right) + \mathcal{O}(|\tilde{x}|^2) \\ &== \eta_{\mu\nu} - \left(A^\alpha{}_{\mu\lambda} \eta_{\alpha\nu} + A^\alpha{}_{\nu\lambda} \eta_{\alpha\mu} - \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right|_{x=0} \right) \tilde{x}^\lambda + \mathcal{O}(|\tilde{x}|^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

これが 1 次の精度で $\eta_{\mu\nu}$ に一致するためには， $A^\mu{}_{\nu\lambda}$ を

$$A^\alpha{}_{\mu\lambda} \eta_{\alpha\nu} + A^\alpha{}_{\nu\lambda} \eta_{\alpha\mu} - \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.7)$$

を満たすように選べばよい．そして添字を cyclic に入れ替えた式を足し引きすることによって

$$A^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \right|_{x=0} - \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right|_{x=0} \right) \eta^{\lambda\alpha} \quad (2.8)$$

を得る．つまり，一般のメトリック g に対して A を (2.8) のようにとった座標変換 (2.2) を取れば，新しい座標系でのメトリック $\tilde{g}$ を 1 次の精度で η とできるということである．

(ii) 座標変換として Taylor 展開の 3 次までを考えよう.

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}A^\mu_{\nu\lambda}x^\nu x^\lambda + \frac{1}{6}D^\mu_{\nu\lambda\rho}x^\nu x^\lambda x^\rho + \mathcal{O}(|x|^4), \quad (2.9)$$

そして $A^\mu_{\nu\lambda}$ は, (i) の結果を満たすものにとることにする. こうすることで $\tilde{g}$ の 1 次の項が零になるから

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0 \cdot \tilde{x}^\lambda + \frac{1}{2}\tilde{\partial}_\lambda\tilde{\partial}_\rho\tilde{g}_{\mu\nu}(0)\tilde{x}^\lambda\tilde{x}^\rho + \mathcal{O}(|\tilde{x}|^3). \quad (2.10)$$

この時点で $A^\mu_{\nu\lambda}$ は (2.8) を満たすものとしてすでに決めてしまっているのに, 次の問いは $D^\mu_{\nu\lambda\rho}$ をうまく選ぶことによって, $\tilde{\partial}_\lambda\tilde{\partial}_\rho\tilde{g}_{\mu\nu}(0)$ を 0 にできるか? である. まず $\tilde{\partial}_\lambda\tilde{\partial}_\rho\tilde{g}_{\mu\nu}(0)$ の自由度については, 添字 λ と ρ , および μ と ν についてそれぞれ対称でありしたがって独立な自由度の数は

$$(4 + {}_4C_2) \times (4 + {}_4C_2) = 100. \quad (2.11)$$

一方, $D^\mu_{\nu\lambda\rho}$ については, 独立な自由度の数は

$$4 \times (4 + 4 \cdot 3 + {}_4C_3) = 80 < 100 \quad (2.12)$$

となって, $\tilde{\partial}_\lambda\tilde{\partial}_\rho\tilde{g}_{\mu\nu}(0)$ の自由度よりも少ない. これより $\tilde{g}$ の Taylor 展開を考えたとき, その 2 次項の全てを 0 とできるような座標変換は一般に存在しないことが分かる.

(iii) 局所慣性系とは, x の 1 次の精度でメトリックが Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ に一致する座標系である. つまり

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(|x|^2), \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (2.13)$$

を満たす座標系である. 時空上の点であれば, 適切な座標変換を取ってくことでいつでも局所慣性系に移ることができる. これは (ii) の手続きにより保証されている.

コメント

本問では等価原理の数学的な表現を得ました (より正確には Einstein の等価原理). 等価原理は曲がった時空でも局所的には平坦時空と見なせるということを保証してくれ, この意味で特殊相対論から一般相対論へ移るのに非常に重要な役割を果たします.

さて, 本問では 1 次だの 2 次だのということをあからさまに書きましたが, これは数学的な厳密さだけを強調したものではありません. ここには, **(座標変換によって消せない) 重力の効果はメトリックの 2 階微分を通じて現れる**という重要な物理的意味もあります. このことは Riemann テンソルを扱うときにより良く分かるはずなので, 頭の片隅にでも置いておいてください.

3 A sample answer

(i) d 次元時空 $\mathcal{M}$ 上の点 P における接空間を $T_P\mathcal{M}$ とする. そして $T_P\mathcal{M}$ の n 個の元 (n 個のベクトル) を $\mathbf{v}_{(1)} = v_{(1)}^{\mu_1}\mathbf{e}_{\mu_1}$, $\mathbf{v}_{(2)} = v_{(2)}^{\mu_2}\mathbf{e}_{\mu_2}$, $\dots$, $\mathbf{v}_{(n-1)} = v_{(n-1)}^{\mu_{n-1}}\mathbf{e}_{\mu_{n-1}}$, $\mathbf{v}_{(n)} = v_{(n)}^{\mu_n}\mathbf{e}_{\mu_n}$ と用意する. ここで $\{\mathbf{e}_i\}$ は $T_P\mathcal{M}$ を張る座標基底の組とし i は $1 \sim d$ を走る^{*1}. また $v_i^{\mu_i}$ はこの座標基底の取り方に応じて

^{*1} $\dim T_P\mathcal{M} = d$ となることから言えることだが, うるさいことを言うとはこれは自明ではない. 証明は "General Relativity" (R. M. Wald) の Theorem 2.2.1 などを見よ.

決まる各ベクトルの (反変) 成分である*2. そしてこれらから次の直積 T を作る.

$$\begin{aligned} T &= (v_{(1)}^{\mu_1} e_{\mu_1}) \otimes (v_{(2)}^{\mu_2} e_{\mu_2}) \otimes \cdots \otimes (v_{(n-1)}^{\mu_{n-1}} e_{\mu_{n-1}}) \otimes (v_{(n)}^{\mu_n} e_{\mu_n}) \\ &= v_{(1)}^{\mu_1} v_{(2)}^{\mu_2} \cdots v_{(n-1)}^{\mu_{n-1}} v_{(n)}^{\mu_n} e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{n-1}} \otimes e_{\mu_n} \\ &= T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-1} \mu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_n}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで, 1 式から 2 式へは多重線形性から, 2 式から 3 式では

$$T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-1} \mu_n} := v_{(1)}^{\mu_1} v_{(2)}^{\mu_2} \cdots v_{(n-1)}^{\mu_{n-1}} v_{(n)}^{\mu_n} \quad (3.2)$$

とした. この $T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-1} \mu_n}$ はいま張っている座標での T の成分表示である. 次に座標の変換 $\{x\} \rightarrow \{x'\}$ に際し, ベクトル v の成分の変換則は

$$v'^{\sigma} = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} v^{\mu} \quad (3.3)$$

となることに注意し, プライム付きの系で上記と同一のテンソル T を表示すると

$$\begin{aligned} T &= (v'_{(1)}{}^{\sigma_1} e'_{\sigma_1}) \otimes (v'_{(2)}{}^{\sigma_2} e'_{\sigma_2}) \otimes \cdots \otimes (v'_{(n-1)}{}^{\sigma_{n-1}} e'_{\sigma_{n-1}}) \otimes (v'_{(n)}{}^{\sigma_n} e'_{\sigma_n}) \\ &= v'_{(1)}{}^{\sigma_1} v'_{(2)}{}^{\sigma_2} \cdots v'_{(n-1)}{}^{\sigma_{n-1}} v'_{(n)}{}^{\sigma_n} e'_{\sigma_1} \otimes e'_{\sigma_2} \otimes \cdots \otimes e'_{\sigma_{n-1}} \otimes e'_{\sigma_n} \\ &= \frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\sigma_n}}{\partial x^{\mu_n}} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-1} \mu_n} e'_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes e'_{\sigma_n} \end{aligned} \quad (3.4)$$

したがって

$$T'^{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n} = \frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\sigma_n}}{\partial x^{\mu_n}} T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-1} \mu_n}. \quad (3.5)$$

以上から n 個のベクトルの直積として作った T が n 階の反変テンソルになっていることが分かる. T の成分が構成しているベクトルの成分 v^{μ} に依っていることから, 任意の反変テンソルはそれに応じた適切なベクトルを持ってくことで構成できそうである. また, 各基底 e_{μ} に対して 1 つ定まる双対基底 ω^{μ} ($e_{\alpha} \cdot \omega^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ を満たす) で張られる余接空間 $T_P^* \mathcal{M}$ を導入し直積を考えることで, テンソルの共変成分を表せるようになり一般のタイプのテンソルに拡張できる.

次に, d 次元時空で n 階のテンソルを構成するためにはいくつのベクトルが必要かを考える. まず, d 次元時空上の各点における接空間は $\dim T_P \mathcal{M} = d$ を満たすので (以下の脚注を見よ) この数分の線形独立な座標基底および双対基底をとることができ, これに応じて現れるベクトルの反変成分, 共変成分の数は d である. そして, 一般の n 階のテンソルの成分は d^n であるから $d^n/d = d^{n-1}$ 個のベクトルを用意すればよい. 我々が住む 4 次元時空 (少なくとも有効的にはそう見えている) では 4^{n-1} 個.

(ii) 反変テンソル $A^{\mu\nu}$, 共変テンソル $B_{\mu\nu}$ に対して

$$C^{\mu}_{\nu} := A^{\mu\alpha} B_{\alpha\nu} \quad (3.6)$$

が 2 階の混合テンソルになることを $A^{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}$ の変換性から示す. まず座標変換 $\{x\} \rightarrow \{x'\}$ に伴う, これらの変換性は

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu} &\rightarrow A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} A^{\alpha\beta} \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow B'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} B_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

*2 一方で e の添え字は単にラベルであることに注意する.

また

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (3.8)$$

にも注意することで

$$\begin{aligned} C'^{\mu}_{\nu} &= A'^{\mu\alpha} B'_{\alpha\nu} \\ &= \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} A^{\gamma\delta} \right) \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} B_{\sigma\rho} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}} \right) \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} A^{\gamma\delta} B_{\sigma\rho} \right) \\ &= \delta_{\delta}^{\sigma} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} A^{\gamma\delta} B_{\sigma\rho} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} A^{\gamma\delta} B_{\delta\rho} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} C^{\gamma}_{\rho}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

これより示された.

$$(iii) \quad A^{\beta\alpha} B_{\alpha\beta} = C^{\beta}_{\beta} =: D \quad (3.10)$$

がスカラー量であることは (3.9) で $\mu = \nu$ とすることで

$$C'^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} C^{\gamma}_{\rho} = \delta^{\rho}_{\gamma} C^{\gamma}_{\rho} = D \quad (3.11)$$

となることから分かる.

$$(iv) \quad \delta'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = \delta^{\rho}_{\sigma} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \delta^{\rho}_{\sigma}. \quad (3.12)$$

より分かる.

コメント

私は数学が得意ではないので変な記述になっていましたらすみません... 答えはざっくりと書いてく
れていれば OK です. ちなみに数学的に書かれた GR の本としては Wald の "General Relativity" や
Hawking and Ellis の "The large scale structure of space-time" が有名です.

ここで押さえておくべきなのは数学の概念ではなくて, "テンソルやベクトルなどの幾何学的対象こそが
先験的に存在するものであって, 座標系は計算のために導入した二次的なものにすぎない" というこ
とです. あくまでこれらの成分が, 座標変換に際して良く知られた変換則に従うわけです. この意識は一般相
対論を学ぶ上で非常に重要であり, 勘違いが起りやすいところだと思っています (経験談).