

General Relativity homework No.1

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 4 月 7 日

0 前置き

皆さんはじめまして, 2022 年度 S セメスターの一般相対論の TA を務めます, 度會大貴 (Daiki Watarai) と申します. ビックバン宇宙国際研究センター (RESCEU^{*1}) の Kipp Cannon 研究室の M2 です. この半期お世話になります, よろしく願います. ここではすこし私が所属する研究室の紹介と自己紹介などの前置きをさせていただきます.

0.1 Kipp Cannon 研究室について

まず, Kipp 研の情報はあまり出回らない気がするので少しこの紹介をします. Kipp 研では, LIGO(将来的には KAGRA も) で得られた重力波のデータを解析するパイプラインの開発を行ったり, これらのデータから物理を読み取るといった理論研究を行ったりしています. 実際, 重力波に関わる研究ならばどんなことでも OK な印象です (興味に応じてボスが共同研究者を紹介したりしてくれます). なんといっても LIGO や KAGRA というとても大きな研究組織に所属できるので, 重力波についての様々な研究の情報交換がしやすく第一線で活躍されている研究者も見つけやすいという, 他の研究室ではなかなか享受できないメリットがあります. また, ボスは日本語が話せないで^{*2} ミーティングなどは英語で行っていますが, とても丁寧に対応してくださるので英語が苦手でも大丈夫です. どちらにせよ院生生活をしていると英語は必須なので, そういう点では main language が英語であることを重く受け止めすぎなくてもいいかもしれません. 重力波に興味がある方はぜひ検討してみてください!

0.2 自己紹介

ここからは軽めの自己紹介です. 私は学部は京大理学部で過ごしました. 物理に完全に目覚めたのは, 遅くて B4 のところで, 卒業研究で輪講した”場の古典論”が難しすぎたことがきっかけでした. 一般相対論を特に予習せずに輪講に参加してしまった私が悪いのですが, あれはむずすぎです. これを紐解くために苦勞して勉強していくうちに, 相対論の美しさや面白さに魅了され完全にハマりました.

現在の研究テーマは, 平たく言えば, 一般相対論を超える重力理論 (Beyond-GR) への手がかりを重力波デー

^{*1} 詳しくは <http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/member.php> をぜひ見てみてください. Kipp 研でなくてもなにかしら興味のある方は気軽にご連絡ください! 気になる研究室があれば, 僕のできる範囲にはなっていますが, 先生だけでなく先輩たちとの contact をアレンジすることもできます!

^{*2} ということになっていますが, 実際かなり理解されていると思います. そう仮定しないと説明できない事象がいくつか存在します.

タから見つけるといったものです。一般相対論にはその枠組みからその適用限界が帰結されるという不思議な性質があり、Plank scale では有効でないことがすでに分かっています。一方で、いま観測されている場の強度でその痕跡がないか、またそもそも他の重力理論のほうが適切なのかは open question です。ここに迫る研究をしたいと考えています。

先ほど京都にいたころ場古典が分からず苦勞して勉強したと書きましたが、実はこの際に横山先生の演習問題を自主的に解き、わからないところは当時の TA で今となっては仲良しの渡慶次さん (現横山研 D2) の解答にお世話になっていたという、この講義との不思議な縁があります。そんなこんなで、この講義の TA をできることが個人的にはとても感慨深いです。この講義で毎週課される課題は、お世辞にも easy だとは言えませんが (そして僕が B4 のときにこれらが課されていたらと思うとゾッとしますが)、これをやりきった暁には一般相対論について相当な理解が得られているに違いありません。そのお手伝いができるように頑張りますのでよろしくをお願いします!

0.3 模範解答について

今後、毎回以下のような形で解答例を上げていきます。あくまで解答例にすぎないので、よりエレガントであったりもしくは面白い着想の答案があったりすれば、次週の解答例の前に (もちろん匿名で) 紹介しようと思います。私自身も間違えることがあると思いますので、その際は遠慮なく教えてください。また、復習の役に立てるように各問の参考文献も私ができる範囲で載せていこうと思います (逆に不勉強がばれることもありそうですが)。

0.4 参考図書

この講義を通して使用できそうな教科書 (初級から中級レベル) をここに列挙しておきます。順序はだいたいおススメ順です。横山先生からもご紹介があるかと思いますが、学生目線の提案も有意義だろうと考えてのことです。参考にしたりしなかったりしてください。

1. 須藤靖 『一般相対論入門』 日本評論社

言わずと知れたスタンダードです。みなさんすでにご存じかもしれませんね。概念の導入と相対論の思想の解説がとても丁寧なので読みやすいと思います。RESCEU でも多くの人がこの本から一般相対論を始めているようです。

2. Barnard Schutz 著 二間瀬敏文 江里口良治共訳 『相対論入門 (上下)』 丸善

この本も有名ですね。(上) が特殊、(下) が一般と分かれています。まず手を動かせるようになりたいと考える方には 1,2 はピッタリだと思います。

3. 佐々木節 『一般相対論』 産業図書

この本は絶版になっていた気もしますが、とても明快でまとまった本です。1,2 をある程度読んだあとの次に読む本としては最適だと思います。内容自体はとてもスタンダードですが、これよりさらに発展した formal な内容に進むときに必要となる事柄もいくつか散りばめられています。個人的には、和書では一番好きな本です。

4. C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler 著 若野省己訳 『重力理論』 丸善出版

昔から”電話帳”の愛称で親しまれている (?) 名著『Gravitation』の和訳本です。つい最近、待望のソフトカバー版が出ました。物理的内容ももちろんですが、微分幾何のパートがとても良いと思います。京

都のころの指導教員の方に、“数学の部分を読まないはこの本の良さが半減する”と言われ、M1 になってから詳細にここを読みました。今思うと確かにそうだなと思います。数学的に厳密に議論されることではないですが、物理的解釈がとても丁寧に書いてあるので大変役に立ちます。また、practical な計算法も詳しく載っているので、この講義の演習でも使えること間違いなしです。

個人的には重力波の基礎をはじめに勉強するならこの本が一番だと思っています。コラムまで読めば細かい議論も詳しく載っていますし、他の教科書で疑問に思ったところもだいたいこれに載っていました(重力波の内容に限りません)。すべてを読むことは出来ていませんが、私が一番好きな教科書です。

5. Eric Poisson 『A Relativist's Toolkit』 Cambridge

ブラックホールの数理に必要な基礎的な事柄がまとめられた本です。著者である Poisson は“Schutz と Wald(ここには書きませんが数学的に書かれた相対論の本)の橋渡しとなるよう意図した”と前書きで書いています。一般相対論に割かれている分量は少ないですが、微分幾何のあたりはよくまとまっている(2章)ので課題を解く際の良い reference になると思います。個人的な体感としては、以下で紹介する他の本よりも、全体を通して行間が埋まっている印象です。また演習問題がとても楽しいです。

6. Landau and Lifshiz 著 恒藤敏彦 広重徹訳 理論物理学教程『場の古典論』 東京図書

いちおうこれも note しておきます。なぜならエネルギー・運動量の擬テンソルのくだり (§ 96) については、これが一番簡潔にまとまっているからです(この講義でも扱うと思われる)。この他にも同期化された基準系 (§ 97) など、確かにこの本にしか explicit に載っていない内容があるので読んで損はないと思います。しかし、書き方や notation が古いという点でも、1,2 を読みこなした後に手に取るのが良いと個人的には思います。

7. 内山龍雄 『一般相対性理論』 裳華房

ゲージ理論で有名な内山先生による、分厚いほうの相対論の本です。2章のテンソル解析は読みごたえがあったためになりますし、この講義の演習問題を解くのに使えます。書かれた時代的な背景もあるのか、場古典と併用するといった感じになりました。また Kerr 解の構成など、レアな内容も網羅しています。私は後半は読めていません。

8. 田中貴浩 基幹講座『相対論』 東京図書

昨年の夏に出版された京大天体核の田中さんによる相対論の本です。基幹講座物理学のシリーズの一冊です。前半は比較的丁寧に読みやすいのですが、後半部分から急に内容が高度になっていく印象でした。たとえば、Hawking radiation の内容が“基本”になっていたり、Penrose diagram がなんの断りもなくスッと出てきたりします。しかし、他の教科書にはない切り口での記述も多いので大変ためになります。私も勉強中の一冊です。

0.5 質疑応答について

この講義や演習についての質問は、私のメールアドレス (wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp) や kougisoutairon@gmail.com で受け付けています。特に、演習の採点については私が責任を持って行っていますので、これらについてはこちらでお願いします。もちろん講義に関する質問は、授業後に横山先生に直接お伺いするのが最も良いと思いますが、私に聞いてもらっても OK だといった感じです(私は対面講義には参加していないため、私に聞くのはできるだけ避けたほうが良さそうです)。

1 A sample answer

慣性系 K を (ct, x, y, z) とまず敷く. そして, この系で事象 A, B が $A : (ct_A, x_A, y_A, z_A)$, $B : (ct_B, x_B, y_B, z_B)$ だとして. さらに, これら A, B を別の慣性系 K' で眺め, $A : (ct'_A, x'_A, y'_A, z'_A)$, $B := (ct'_B, x'_B, y'_B, z'_B)$ であるとする. 慣性系同士は Lorentz 変換

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.1)$$

で繋がっており, この変換下では事象間の世界間隔が選んだ慣性系に依らず不変であるから, これが

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma &= \eta_{\rho\sigma} \\ \text{where } \eta_{\mu\nu} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

に対応することに注意すると

$$s_{AB}^2 = -c^2(t_A - t_B)^2 + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)^2 = s'^2_{AB} = -c^2(t'_A - t'_B)^2 + (\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B)^2 \quad (1.3)$$

が成り立つ. K' がふたつの事象 A と B が同時に起こったと見ることを許す慣性系であるとする, これは

$$t'_A = t'_B \quad (1.4)$$

が成り立つとすることに他ならない. したがって事象 A, B が満たすべき条件は

$$s_{AB}^2 = -c^2(t_A - t_B)^2 + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)^2 = (\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B)^2 > 0 \quad (1.5)$$

である. 一言でいえば, A と B が互いに空間的 (spacelike) に隔たった事象であれば良い.

コメント

方針は straight-forward です. 世界間隔は採用する慣性系に依らない量であるということがカギになります. ころへんの議論は, "場の古典論 (Landau-Lifshiz)" の初めの特殊相対論のパート (特に第 1 章 § 2) に詳しく載っています. Schutz などにも多少詳しく載っているかもしれません. ぜひ参考にしてみてください.

ベクトルや超曲面などの幾何学量の時間的 (timelike), 空間的 (spacelike) そしてヌルの (null) への分類は, 重力を入れた一般相対論でも登場します. 重力が入ってくるとより直感に反してくるので, この問題を通じて, これらの概念を思い起こしておくとも今後見通しが良くなると思います.

2 A sample answer

(i) SI 単位で書いた真空を媒質とする Maxwell 方程式の微分形は以下

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

以降, 引数の部分 $(\mathbf{r}, t)$ を適宜, 省略することにする. ここでは, 問題文の「真空中」という条件を $(\rho(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0)$ という意味ではなく)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

が成り立つことと解釈する. さて, 上の方程式系を Heaviside 単位系で書くために

$$Q_H = \frac{Q}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \mathbf{E}_H = \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}_H = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0}} \quad (2.4)$$

によって $Q_H, \mathbf{E}_H, \mathbf{B}_H$ を導入し, これらで Maxwell 方程式を書き換えることを考える. これに伴って

$$\rho_H = \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \mathbf{j}_H = \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.5)$$

も導入する. こうすると $Q = \int d^3x \rho$, $\mathbf{j} \propto \rho$ と辻褄が合ってよい. その結果, Heaviside 単位系で書いた Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{j}. \quad (2.7)$$

を得る. ここで書き換える際に出てきた添字 H を省き, 改めて所望の単位系で書いた Maxwell 方程式とした.

(ii) ここでの目的は, Maxwell 方程式が Lorentz 変換に対して形を変えない (共変的である) ことを示すことである. そこでまず, 次の通り 4 元電流 j^μ と 4 元ポテンシャル A^μ を考え:

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}), \quad A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad (2.8)$$

これらは座標と同じ変換を受けることを仮定する:

$$j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu, \quad A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu. \quad (2.9)$$

ここから Maxwell 方程式の共変性に話を結びつけるために, Maxwell 方程式系を (電磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ではなく) 電磁ポテンシャル $\phi, \mathbf{A}$ で書き換えておく. Heaviside 単位系で表されたそれは

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \mathbf{j}, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{1}{c} \rho. \quad (2.10)$$

ただし

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

であり、以上を満たす $\phi, \mathbf{A}$ から

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.12)$$

によって、電場と磁場が得られる。以上 5 つの方程式系が、電磁ポテンシャルで表された Maxwell 方程式である。さて、仮定 (2.9) 式の前で Maxwell 方程式系が共変であることを言いたい。そのためにまず、次を導入すると：

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (2.13)$$

$\partial'_\mu = \partial/\partial x'^\mu = (\partial x^\nu/\partial x'^\mu) \partial/\partial x^\nu = [\partial(\Lambda_\rho{}^\nu x'^\rho)] \partial^\mu = \Lambda_\rho{}^\nu (\partial'_\mu x'^\rho) \partial_\nu = \Lambda_\rho{}^\nu \delta^\rho_\mu \partial_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$ であるから、 ∂_μ は共変ベクトルとして振る舞う。同様に、 ∂^μ は反変ベクトルとして振る舞う。また、 $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ である。

さて、(2.10) 式と (2.11) 式をそれぞれ次のように書いておく：

$$\square A^\mu + \frac{1}{c} j^\mu = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.15)$$

すると、 $\square$ の共変性および A^μ, j^μ が座標と同じ変換を受けることをつかって

$$\square' A'^\mu + \frac{1}{c} j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \left(\square A^\nu + \frac{1}{c} j^\nu \right) = 0, \quad \partial'_\mu A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot \partial_\mu A^\nu = 0. \quad (2.16)$$

したがってこれらは共変。電磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ についての (2.12) 式は 4 元形式ではないので扱いづらいが、次の電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.17)$$

を導入すると、 ∂_μ と A_μ の変換則をつかって、これが (0, 2) テンソルであることを知る。よって電磁場の変換則がここから決まり、この変換に対して (2.12) 式は共変となる。

最後に、sourceless な Maxwell 方程式を取り上げて、それが Galilei 変換に対して共变的でないことを示す。それには、 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ について成り立つ波動方程式

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0 \quad (2.18)$$

について、d'Alembertian の共変性を見ればよい。 $\square$ を、関係

$$x = x - Vt, \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.19)$$

によってプライム付きの量で書き換えると

$$\square = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \neq \square' \quad (2.20)$$

となり、共変でない*3。

*3 種々の 4 元量の共変性を仮定して方程式系が共変であることを示すここでの立場とは逆に、最初に方程式系の共変性を仮定してから出発すると、座標変換の式と電荷保存の式から、種々の 4 元量および電磁場の変換則をすべて導くことができる。

- (iii) 電磁場の変換則は (2.17) 式から得られる. すると $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 各成分の変換則が (行列の各要素として) 一
 気に得られる. あるいは, (2.17) 式に対して (2.12) が共変になることから各成分ごとの変換について
 直接計算してもよい. 結果は

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y), \quad (2.21)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y). \quad (2.22)$$

コメント

このあたりの計算は電磁気でたくさんやったと思うので特にコメントはありません. 院試が控えている
 方々には良い復習の機会になったかもしれません. 強いて言うのであれば, 共変性の感覚は大事にしてほ
 しいということくらいでしょうか. (2) で Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して共変であることを示
 しました. 今後出てくる一般相対論の基礎方程式である Einstein 方程式は一般座標変換に対して共変で
 す (一般共変性). 今後これが出てきた際に確認してみてください.

3 A sample answer

A を

$$A = \begin{pmatrix} -a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

where $a, b, c, d > 0$

と設定しておくことによって題意を示す. すると

$$A\eta^t A = \begin{pmatrix} -a^2 & & & \\ & b^2 & & \\ & & c^2 & \\ & & & d^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

となる. ここで, 非退化対称行列 G はすでに対角化されているとして

$$G = A\eta^t A. \quad (3.3)$$

とできる (符号系も満たす). これを逆算して具体的に A を構成すれば良い. G を対角化するためには, 適宜適
 当な行列をとってこれば良いのでこの議論で充分である.

コメント

この主張は, 計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を 4×4 行列 G と見なしてやると, これを $\eta_{\mu\nu}$ とできるような適切な (座標の)
 変換行列 A をいつでもとてくることができるということを意味しています. このことは, (時空上の点
 であれば) 任意の点で局所 Lorentz 系がとれることに対応しています.

4 A sample answer

一例として、静止質量 m を持つ質点の x 軸に沿った等加速度直線運動を取り上げる。ここで等加速度とは、質点の速度が常に 0 となる座標系において、 a を定数として

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \quad (4.1)$$

である。相対論的な運動方程式は

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \quad (4.2)$$

であり、このうち興味のある成分を書き下すと

$$p^1 = mu^1 = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad f^1 = \frac{f_x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{ma}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (4.3)$$

すると第 1 成分から次の微分方程式を得る：

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right] = a \quad (4.4)$$

これを初期条件 $x(0) = 0, v(0) = 0$ の下で解くと

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2 / c^2}}, \quad x(t) = \int_0^t d\tilde{t} v(\tilde{t}) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (4.5)$$

非相対論的な場合 $at \ll c$ を考えると

$$x(t) \simeq \frac{1}{2} at^2, \quad v(t) \simeq at \quad (4.6)$$

となって、Newton 力学から得られる結果が出る。また $t \rightarrow \infty$ とすると $v(t) \rightarrow c$ となることも確かめられる。

コメント

シンプルに等加速度直線運動を考えてみました。ここで等加速度とは、質点の静止系での加速度が常に一定となることです。この答えから引き出せる物理的意味は、自身は等加速度運動をしているつもりでも”止まっている人”から見れば光速 c に近づいていくということです。また非相対論的極限で Newton 力学の結果が再現されることも読み取れます。詳しくは”場の古典論”第 1 章 § 7 の問題に載っています。