

一般相対論演習その12・最終回（横山）

2022年6月28日配布・7月4日提出締切・5日解答公開予定

<http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html>

I 保存則とエネルギー運動量擬テンソル

重力場が存在しない場合のエネルギー運動量テンソル T_ν^μ の保存則は $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$ とかけたが、重力場の存在する場合には、対応原理によりこれは共変微分で書き直される。具体的に書くと

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial T_\nu^\mu \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} - \boxed{\text{イ}} = 0 \quad (1)$$

となり、 $\boxed{\text{イ}}$ は一般には零でない値をとるので、この式は体積要素 $\sqrt{-g}$ 内での保存を表す式にはなっていない。 T_ν^μ の中には重力場のエネルギーや運動量が含まれていないからである。

ニュートン重力の場合もそうだったが、物質と重力のエネルギー・運動量を合わせて保存則が成り立つと考え、(1) を

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} [\sqrt{-g}(T_\nu^\mu + t_\nu^\mu)] = 0 \quad (2)$$

のように書き換えることを考えよう。この書き換えにアインシュタイン方程式を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} t_\nu^\mu) = \boxed{\text{ロ}} \quad (3)$$

のように、右辺は曲率テンソルと計量テンソルで表すことができる。これが積分できれば t_ν^μ が求められる。

(i) $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ロ}}$ に入る適切な数式を求めよ。

(ii) t_ν^μ はテンソルでない。その物理的な理由を説明せよ。

(iii) では t_ν^μ はどのような変換に対してはテンソルのように振舞うか、述べよ。

これから先は弱重力場を考えることにする。したがって、添え字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ で行い、 $\sqrt{-g} = 1$ と近似できる。

(iv) $\boxed{\text{講義}}$ で定義した $\psi_{\mu\nu}$ に対し、

$$\psi_{\sigma\tau,\nu} \psi^{\sigma\alpha,\tau}_{,\alpha} = (\psi_{\sigma\tau,\nu} \psi^{\sigma\alpha,\tau})_{,\alpha} - \frac{1}{2} (\psi_{\sigma\tau,\alpha} \psi^{\sigma\alpha,\tau})_{,\nu} \quad (4)$$

が成り立つことを示せ。

(v) 前小問の結果を参考に、(3) を積分することによって t_ν^μ を $\psi_{\mu\nu}$ を用いて表せ。

(vi) TT ゲージで z 方向に進む平面波の重力波 $h_{ij}^{\text{TT}} = \psi_{ij}^{\text{TT}} = a_{ij}^{\text{TT}} e^{-ik(ct-z)}$ のもつエネルギー密度の周期平均を a_+ , $a_\times$ を用いて表せ。

II $u^\mu(x)$ をある流体の四元速度ベクトルとする。以下の問いに答えよ。

- (i) $P_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$ はこの四元速度ベクトルに直交した 3 次元超曲面への射影テンソルを与えることを示せ。
- (ii) $u_{\alpha;\beta}$ は以下のように分解できることを示せ。

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} - a_\alpha u_\beta. \quad (5)$$

ただし、 $a_\alpha \equiv u_{\alpha;\beta} u^\beta$ は四元加速度、 $\theta \equiv u^\alpha_{;\alpha}$ は膨張率 (expansion)、

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta - u_{\beta;\mu} P^\mu_\alpha), \quad (6)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta + u_{\beta;\mu} P^\mu_\alpha) - \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} \quad (7)$$

で定義される $\omega_{\alpha\beta}$ と $\sigma_{\alpha\beta}$ は、回転 2 形式 (rotation 2-form) と歪テンソル (shear tensor) である。

- (iii) 上で定義した膨張率に対し、

$$\frac{d\theta}{d\tau} = a^\alpha_{;\alpha} + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (8)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\omega^2 \equiv \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$ 及び $\sigma^2 \equiv \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ である。この微分方程式をレイチャウドゥーリ方程式という。

- (iv) この方程式を用いて、リッチテンソルがどのような物理的意味を持っているか考察せよ。

III 太陽の 30 倍の質量を持つブラックホール二つが連星系を作り、重心の周りを公転運動しているとする。この系は重力波の放出によってエネルギーを失いながら公転し、最終的に合体する。地球からの距離を 300Mpc として以下の問いに答えよ。

- (i) 合体の直前の公転運動から放出される重力波を地球上で観測した場合、期待される振幅を見積もってみよ。
- (ii) 合体後太陽質量の 57 倍のブラックホールが残ったという。合体の瞬間に放出された重力波を地球上で観測した場合、期待される振幅を見積もってみよ。
- (iii) 以上の結果を GW150914 の観測結果と比べてみよ。