

General Relativity homework No.11

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 6 月 27 日

1 A sample answer

2 次元 Minkowski 時空の線素

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 \quad (1.1)$$

について

$$u = ct - x, \quad v = ct + x \quad \text{逆に} \quad x = -\frac{1}{2}(u - v), \quad ct = \frac{1}{2}(u + v) \quad (1.2)$$

であるから, ヌル座標 u, v を用いて線素を書き換えると

$$ds^2 = -dudv. \quad (1.3)$$

さらに新変数

$$u' = 2 \arctan u, \quad v' = 2 \arctan v \quad (1.4)$$

を導入すると, $-\infty < u, v < \infty$ だったので明らかに $-\pi < u', v' < \pi$. これらで線素を表すことを考えると, $du = [(1 + u^2)/2]du' = du'/2 \cos^2(u'/2)$, 同様に $dv = dv'/2 \cos^2(v'/2)$ によって

$$ds^2 = -\frac{1}{4 \cos^2(u'/2) \cos^2(v'/2)} du' dv'. \quad (1.5)$$

ここで, 共形変換 $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ において

$$\Omega^2 = 4 \cos^2(u'/2) \cos^2(v'/2)$$

と置くと, 式 (1.5) に対応する線素 $d\bar{s}^2$ は式 (1.3) と同じ形になる. そうやって有限領域に押し込められた Penrose ダイアグラムを描くと

$$\mathcal{V} = +\infty, \quad \bar{\mathcal{U}} = -\infty, \quad \mathcal{Y} = (\pm\infty, \mp\infty).$$

2 A sample answer

Schwarzschild 時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - (r_g/r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

において, Kruskal 座標

$$\bar{u} = -2r_g e^{-u/2r_g}, \quad \bar{v} = 2r_g e^{v/2r_g} \quad (2.2)$$

を導入すると

$$ds^2 = -\frac{r_g}{r} e^{-r/r_g} d\bar{u}d\bar{v} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.3)$$

と書ける. 但し

$$u \equiv ct - r - r_g \log \frac{|r - r_g|}{r_g}, \quad v \equiv ct + r + r_g \log \frac{|r - r_g|}{r_g}. \quad (2.4)$$

$-\infty < u, v < \infty$ だったので $-\infty < \bar{u} < 0 < \bar{v} < \infty$ である. そして

$$\text{ク}: r_g, \quad \text{モ}: \pm\infty.$$

また

$$\text{キ}: -\infty, \quad \text{リ}: +\infty.$$

また

$$\text{コ}: \bar{v} = 0, \quad \text{ケ}: \text{ホワイトホール}, \quad \text{ヒ}: \text{ホワイトホール}$$

コメント

個人的な話ですが, Penrose diagram が理解できた (完全には言っていない) ときとてもうれしかった記憶があります. なんだかロマンがありますよね.

相対論の目標の 1 つは時空の大域的な因果構造を知ることです. 言い換えると, すべての時空上の点に対し因果関係を持ちうる領域が一挙に把握できるような map を作成することが課題となります. そのために本問で行っていることは主に 2 つで, **時空の至る所で光円錐 (因果関係) が保存するように共形変換を施す**, そして**無限遠方に対応する領域を有界な領域に落とし込むコンパクト化を行う**ことです. これらの手続きによって, 時空全体の様子を無限遠の領域を含めて一目で把握することが可能になります. このような図のことを Penrose diagram(共形図形) と呼びます.

3 A sample answer

多くの場合, 現実の BH は燃料を使い果たした重い星が重力崩壊することで生じると考えられる. この過程を含む時空は, 一般に静的球対称ではないため^{*1}, Schwarzschild 解で書くことはできない (BH が形成されたのちにはこの解は部分的に有効である). したがって, 全問で得られているものとは異なり, 以下の図 1 が適切なダイアグラムである. 影がついている領域は重力崩壊する天体の内部を表す. その境界となる曲線は天体の表面の軌跡を表しており, timelike curve となっていることに注意する (massive 粒子は timelike curve に沿って動く). この時空の場合は Schwarzschild 時空のような拡張は存在しない.

4 A sample answer

目標:

$$\left[\square - \frac{n-2}{4(n-1)} R \right] \phi = \Omega^{(n+2)/2} \left[\bar{\square} - \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \right] \bar{\phi}. \quad (4.1)$$

^{*1} 特に, 時間方向については明らかに対称性が破れる.

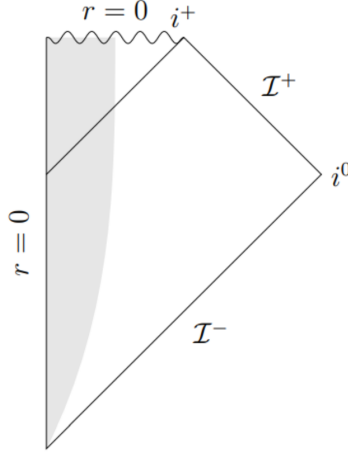


図1 重力崩壊を経てできる Schwarzschild BH 時空の Penrose diagram(H.Reall の lecture note” Black hole” より)

右辺を計算して左辺に一致することを見る方針でいく．右辺第一項を計算すると

$$\Omega^{(n+2)/2} \bar{\square} \bar{\phi} = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{n-2}{2} \frac{1}{\Omega} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Omega) \phi - \frac{(n-2)(n-4)}{4} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega) (\nabla_\nu \log \Omega) \phi \quad (4.2)$$

を得る．問題文に与えられている場 ϕ の変換則を使った．また，スカラー関数 f に対して $\bar{\nabla}_\mu f = \partial_\nu f$ に注意せよ． $g^\mu{}_\mu = n$ である．右辺第二項は

$$\Omega^{(n+2)/2} \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \bar{\phi} = \frac{n-2}{4(n-1)} R \phi - \frac{n-2}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu \log \Omega) \phi - \frac{(n-2)^2}{4} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega) (\nabla_\nu \log \Omega) \phi \quad (4.3)$$

と計算される．これらを辺々引いて

$$\begin{aligned} \text{RHS of (4.1)} &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{n-2}{4(n-1)} R \phi \\ &\quad - \frac{n-2}{2} \frac{1}{\Omega} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Omega) \phi + \frac{n-2}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu \log \Omega) \phi \\ &\quad - \frac{(n-2)(n-4)}{4} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega) (\nabla_\nu \log \Omega) \phi + \frac{(n-2)^2}{4} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega) (\nabla_\nu \log \Omega) \phi \quad (4.4) \end{aligned}$$

と計算できる．2 行目は $-\frac{n-2}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega) (\nabla_\nu \log \Omega) \phi$ とまとめられるので 3 行目と打ち消し合う．□