

一般相対論補遺と演習その11 (横山)

2022年6月21日配布・6月27日提出締切・28日解答公開予定

<http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html>

先週の続き。以下の ア ... ヒ 内を適切に埋めよ。

I ミンコフスキー時空のペンローズダイアグラム (Conformal Diagram)

ヌル座標 $u \equiv ct - x$, $v \equiv ct + x$ を用いて二次元ミンコフスキー時空の線素を書くと $ds^2 =$ ア となる。いま、新変数

$$u' \equiv 2 \tan^{-1} u, \quad v' \equiv 2 \tan^{-1} v \quad (1)$$

を導入すると、 u', v' の変域は、有限の領域 × に限られることになる。 $(\tan^{-1}$ は正接の逆関数である。) この変数で書いたミンコフスキー時空の線素は $ds^2 =$ ツ と表される。したがって、 $\Omega^2 \equiv$ チ という共形変換をすると、変換後の計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ でかいた線素 $d\bar{s}^2$ はもとの線素と同じ形になる。しかしその変域は × と有限なので、全時空を図1左側のように有限領域に示すことができる。

この図において全てのヌル曲線は $(\pm)45^\circ$ を向いており、 $\mathcal{I}^+$ 及び $\mathcal{I}^-$ と記した境界線上に端点を持つ。 $\mathcal{I}^+$ 及び $\mathcal{I}^-$ をそれぞれ、future null infinity, past null infinity と呼ぶ。時間的な軌跡については、 $|u - v|$ を有限に保って $u, v \rightarrow$ ソ に漸近する未来は i^+ (future timelike infinity) に、 $u, v \rightarrow$ ラ に漸近する過去は i^- (past timelike infinity) に終端を持つ。また、図の両端 i^0 は、ヤ (spacelike infinity) を表す。

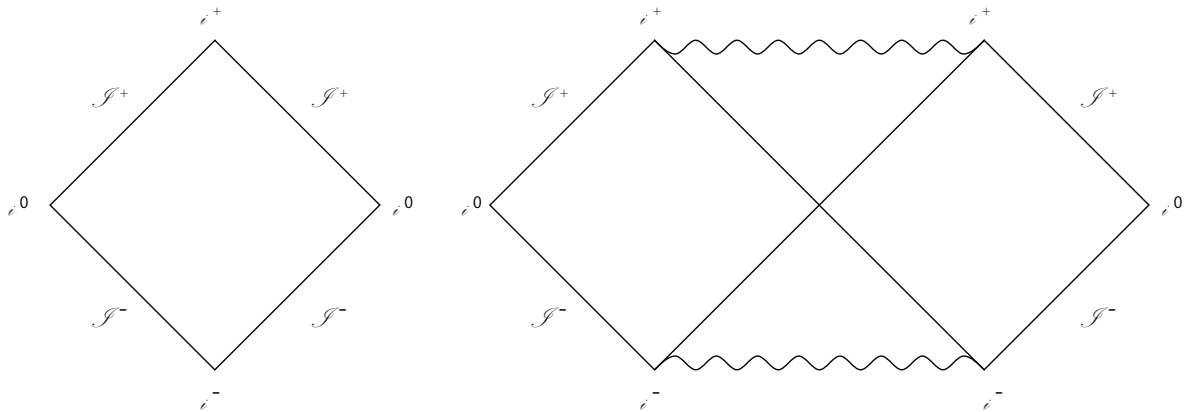


Figure 1: (左図) ミンコフスキー時空のペンローズダイアグラム：右下がりの斜線は $v' = \pm\pi$ 、左下がりの斜線は $u' = \pm\pi$ に対応する。(右図) シュバルツシルト時空のペンローズダイアグラム：左下の i^- と右上の i^+ を結ぶ斜線は $\bar{u} = 0$ 、右下の i^- と左上の i^+ を結ぶ斜線は $\bar{v} = 0$ に対応する。右側の矩形が領域 I、左側が IV、波線 ($r = 0$) ではさまれた上側の三角領域が II, 下側が III である。

II シュバルツシルト時空のペンローズダイアグラム

シュバルツシルト時空

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (cdt)^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2)$$

において、クルスカール座標を $\bar{u} = - \boxed{\text{マ}} e^{-\frac{u}{2r_g}}$, $\bar{v} = \boxed{\text{マ}} e^{\frac{v}{2r_g}}$ によって定義すると、計量は

$$ds^2 = -\frac{r_g}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} d\bar{u}d\bar{v} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad r_g \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (3)$$

とかける。ただし、 u, v は 講義 で定義したとおり、 $u \equiv \boxed{\text{ミ}}$, $v \equiv \boxed{\text{ネ}}$ で与えられる。この計量の $d\bar{u}d\bar{v}$ の部分は前問の二次元ミンコフスキー計量と共形なので、(1) と同様の変数変換をすることにより、コンパクト化できる。すなわち、変域を有限区間に写すことができる。ミンコフスキー時空と共形なので、ペンローズダイアグラムの形も同じになるはずであるが、 $\bar{u}, \bar{v}$ の変域は前問の u, v と異なり、半無限区間 $-\infty < \bar{u} \leq 0$, $0 \leq \bar{v} < \infty$ に限られるので、ダイアグラム上の左側の辺は $\bar{u} = 0$ および $\bar{v} = 0$ 、すなわち $r = \boxed{\text{ク}}$, $t = \boxed{\text{モ}}$ に対応する。この点は $\bar{u}, \bar{v}$ 座標では特異ではないので、 $\bar{u}, \bar{v}$ を全区間 $-\infty < \bar{u}, \bar{v} < \infty$ に拡張することができる。

その結果、シュバルツシルト時空のペンローズダイアグラムは図1右側のような形になる。水平方向の波線は過去と未来の特異点 $r = 0$ を表す。左側にはミンコフスキー時空に漸近する領域がもう一つあり、その $\mathcal{I}^-$ は キ $= -\infty$ に、 $\mathcal{I}^+$ は リ に対応する。

$\bar{u} = 0$ をみたすヌル曲線は $\mathcal{I}^+$ に届き得る最終のヌル曲線である。 $\bar{u} > 0$ をみたすヌル曲線は全て未来の特異点 $r = 0$ にぶつかってしまう。したがって、領域Iにいる観測者にとって $\bar{u} = 0$ が事象の地平線を与えることになる。同様に、領域IVの観測者の事象の地平線は コ で与えられる。領域IIIは領域Iの観測者にとって ケ、領域IVの観測者にとって ヒ の内部を与えることになる。

III 現実的なブラックホールのペンローズダイアグラム

球対称な天体が重力崩壊してシュバルツシルトブラックホールになったとする。このような時空におけるペンローズダイアグラムを書き、図1右側との差異を議論せよ。

IV 共形結合 (Conformal coupling)

n 次元時空において、スカラー場 $\phi(x)$ に対して、共形変換前後の諸量について以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\left[\square - \frac{n-2}{4(n-1)} R \right] \phi = \Omega^{\frac{n+2}{2}} \left[\bar{\square} - \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \right] \bar{\phi}, \quad \bar{\phi} \equiv \Omega^{\frac{2-n}{2}} \phi. \quad (4)$$

R の係数がこの値をとるとき、このスカラー場はスカラー曲率と共形結合 (Conformal coupling) しているという。