

General Relativity homework No.10

度會 大貴 wataraidaiki@resceu.s.u-tokyo.ac.jp

2022 年 6 月 20 日

1 A sample answer

シャピロ遅延(Shapiro delay)とは、重力場中を通る光子が平坦な時空よりも到達時間がかかる効果のこと。曲がった時空での「光速」が c よりも小さくなるように見えるために起こる。簡単に、重力場による時間の遅れと表現されることもある。

2 A sample answer

その 7 V で扱った時空

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + e^{2\gamma} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

において

$$e^{2\alpha} = c^2, \quad e^{2\beta} = \frac{a^2}{1 - Kr^2}, \quad e^{2\gamma} = a^2 r^2 \quad (2.2)$$

と置けば Robertson-Walker 計量

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.3)$$

になる。このとき

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta' = \frac{Kr}{1 - Kr^2}, \quad \dot{\beta} = \dot{\gamma} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \ddot{\beta} = \ddot{\gamma} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}, \quad \gamma' = \frac{1}{r}, \quad \gamma'' = -\frac{1}{r^2} \quad (2.4)$$

である。これらを用いて $R_{\mu\nu}$ の 0 でない可能性のある成分（その 7 V で具体的に計算した成分）を計算すると

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = \left(\frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{2K}{a^2} \right) g_{ij} \quad (i, j = r, \theta, \phi) \quad (2.5)$$

を得る。 R も計算すると

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}a + \dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{K}{a^2} \right) \quad (2.6)$$

を得る。以上より $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}$ は

$$G_{tt} = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3c^2 K}{a^2}, \quad G_{ij} = - \left[\frac{2}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] g_{ij}. \quad (2.7)$$

一方, $T_{\mu\nu}$ には完全流体の形

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

を与えよう. いま $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$ は共動座標系を想定しているので $u^\mu = dx^\mu/d\tau = dx^\mu/dt = (c, 0, 0, 0)$ で, したがって $u_0 u_0 = (u_0)^2 = (g_{0\mu} u^\mu)^2 = (g_{00} u^0)^2 = c^2$ である. ゆえに

$$T_{00} = c^2 \rho, \quad T_{ij} = P g_{ij} \quad (2.9)$$

となるので, Einstein 方程式の 00 成分と ii 成分から

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho, \quad \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2 K}{a^2} = -\frac{4\pi G}{c^2} P \quad (2.10)$$

を得る.

次に, 上の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3P) \quad (2.11)$$

を得るが, いま $a = a(t) > 0$ であり $t = t_1$ で $\dot{a} > 0$ であったとし, さらに $t_2 \leq t \leq t_1$ で $\rho + 3P > 0$ であったとすると^{†1}, 上式を t_2 から t_1 まで t で積分して

$$\dot{a}(t_2) = \dot{a}(t_1) + \frac{4\pi G}{3c^2} \int_{t_1}^{t_2} dt (\rho + 3P) a(t) \quad (2.12)$$

を得る. t_2 を改めて t と書いて

$$\dot{a}(t) = \dot{a}(t_1) + \frac{4\pi G}{3c^2} \int_t^{t_1} d\tilde{t} (\rho + 3P) a(\tilde{t}) \quad (t \leq t_1). \quad (2.13)$$

右辺は正なので左辺も正, つまり $a(t)$ は時間を遡っていくと単調に減少してゆく. $a(t_1) > 0$ だったので有限時間を遡ってゆけば必ず $a(t) = 0$ となる t が見出される. 以上で示された.

コメント

本問では Einstein 方程式を解くことで $a = 0$ となる”点”が必然的に現われてしまうことを見ましたが, 演習最終回で扱う Raychaudhuri 方程式で眺めなおすと, この結果が意味するところがよりクリアになると思います (“A Relativists’s Toolkit”の 2.6 の 2 番を見てみてください).

3 A sample answer

共形変換 $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ に伴ってふたつの時空 $\mathcal{M}$ と $\bar{\mathcal{M}}$ を考え, $\bar{\mathcal{M}}$ の量は $\bar{g}_{\mu\nu}$ によって添字の上げ下げを行なう. すると $\bar{g}^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} \bar{g}_{\rho\sigma} = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} \Omega^2 g_{\rho\sigma}$ であり, この式から $\bar{g}^{\nu\sigma} \Omega^2 g_{\rho\sigma} = \delta^\nu_\rho$ と読み取れる. 両辺に $g^{\rho\lambda}$ を掛けて添字を μ と ν に直せば

$$\underbrace{\bar{g}^{\mu\nu}}_{\text{}} = \frac{1}{\Omega^2} g^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

^{†1} このとき $\ddot{a} < 0$.

これに伴って $\bar{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma}$ と $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ との関係はどうかというと

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial\bar{g}_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial\bar{g}_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\bar{g}_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega^2}g^{\mu\lambda}[(\Omega^2 g_{\lambda\nu})_{,\sigma} + (\Omega^2 g_{\lambda\sigma})_{,\nu} - (\Omega^2 g_{\nu\sigma})_{,\lambda}] \\ &= \Gamma^\mu_{\nu\sigma} + \underbrace{\delta^\mu_{\nu}(\ln\Omega)_{,\sigma} + \delta^\mu_{\sigma}(\ln\Omega)_{,\nu} - g^{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}(\ln\Omega)_{,\lambda}}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

$R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ や $R_{\mu\nu}$, R についても同様に調べよう。まず

$$\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu,\rho} - \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\nu,\sigma} + \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\alpha}\bar{\Gamma}^\alpha_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\alpha}\bar{\Gamma}^\alpha_{\rho\nu}\quad (3.3)$$

を計算したいが、これは (3.2) 式から計算することができる。しかし項がたくさん出てきてツライので、打ち込むのを省略して Ricci テンソルの計算に移ることにする。まず、上の式で $\rho = \mu$ と置いて素直に計算を進めて達した式を記すと

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\nu\sigma} &= R_{\nu\sigma} + (2-n)[(\ln\Omega)_{,\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}(\ln\Omega)_{,\lambda}] + (n-2)(\ln\Omega)_{,\nu}(\ln\Omega)_{,\sigma} \\ &\quad - g_{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\ln\Omega)_{,\mu\lambda} - (n-2)g_{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\ln\Omega)_{,\mu}(\ln\Omega)_{,\lambda} \\ &\quad - [g_{\nu\sigma}(g^{\mu\lambda}_{,\mu} + g^{\alpha\lambda}\Gamma^\mu_{\mu\alpha}) - g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda}_{,\sigma} + g^{\mu\lambda}g_{\sigma\nu,\mu} - g^{\mu\lambda}g_{\mu\nu,\sigma}](\ln\Omega)_{,\lambda}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

ここで $(\ln\Omega)_{,\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}(\ln\Omega)_{,\lambda} = (\ln\Omega)_{;\nu\sigma}$ および $(\ln\Omega)_{,\nu}(\ln\Omega)_{,\sigma} = (\ln\Omega)_{;\nu}(\ln\Omega)_{;\sigma}$ である。また $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$, $g^{\mu\nu}_{,\lambda} = 0$ であることから、 $g_{\mu\nu}$ や $g^{\mu\nu}$ の偏微分は、演習 # 3 よりそれぞれ $g_{\mu\nu,\lambda} = g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}$, $g^{\mu\nu}_{,\lambda} = -g^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}$ と表すことができる。これらを上式に適用すると

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\nu\sigma} &= R_{\nu\sigma} + \underbrace{(2-n)(\ln\Omega)_{;\nu\sigma}} + \underbrace{(n-2)[(\ln\Omega)_{;\nu}][(\ln\Omega)_{;\sigma}]} \\ &\quad - g_{\nu\sigma}\underbrace{\{g^{\mu\lambda}(\ln\Omega)_{;\mu\lambda} + (n-2)g^{\mu\lambda}[(\ln\Omega)_{;\mu}][(\ln\Omega)_{;\lambda}]\}}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

ここで $(\ln\Omega)_{;\nu\sigma} = (\ln\Omega)_{;\sigma\nu}$ も用いた。最後に $\bar{R} = \bar{R}^\mu_{\mu} = \bar{g}^{\mu\lambda}\bar{R}_{\mu\lambda}$ は、(3.1) 式と (3.5) 式から直ちに

$$\bar{R} = \frac{1}{\Omega^2}\left\{R + \underbrace{(2-2n)g^{\mu\lambda}(\ln\Omega)_{;\mu\lambda} - (n-1)(n-2)g^{\mu\lambda}[(\ln\Omega)_{;\mu}][(\ln\Omega)_{;\lambda}]}\right\}.\quad (3.6)$$

4 共形変換って重力理論でどういうときに使うの?

というひとのために、昔作ったやつを以下に載せておきます。題材は $f(R)$ モデルと呼ばれるものです。arXiv: astro-ph/0307338 を参考にしました。

4.1 一般論

$f(R)$ モデルとは R を Ricci スカラーとして、Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ および作用 S がそれぞれ

$$\mathcal{L} = f(R), \quad S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R)\quad (4.1)$$

で与えられるモデルのことである。いま、スカラー場 ϕ を導入した別の作用

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi) + f'(\phi)(R - \phi)]\quad (4.2)$$

を考えると, ϕ に関する運動方程式より

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \phi} = \dots \quad \rightarrow \quad \phi = R$$

が得られ, このとき作用 (4.2) は作用 (4.1) に一致する. したがって, これらふたつの作用が記述する系が等価であることが分かった. 以下では作用 (4.2) で考える.

共形変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad \text{このとき} \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2(x)} g^{\mu\nu} \quad (4.3)$$

を施す. 時空次元を $n = 4$ とする. このとき, 因子 $\sqrt{-g}$ は

$$\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^4(x) \sqrt{-g} \quad (4.4)$$

と変換し, Ricci スカラーは

$$R \rightarrow \tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2(x)} \left(R - \frac{6\Box\Omega}{\Omega} \right) \quad (4.5)$$

と変換する. 以上, 右辺に登場する量 $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $\sqrt{-g}$, R , $\Box$ はすべて変換前のものであることに注意せよ.

作用 (4.2) を変換後つまりチルダ付きの量で書き換えることを考える. これに際して, 式 (4.4) を

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{\Omega^4(x)} \sqrt{-\tilde{g}}$$

と書き換え, また式 (4.5) に対する同様の書き換え及び逆変換を

$$R = \Omega^2(x) \tilde{R} + \frac{6\Box\Omega}{\Omega}, \quad \tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2(x)} R + 6\Omega(x) \tilde{\Box} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right] \quad \rightarrow \quad R = \Omega^2(x) \tilde{R} - 6\Omega^3(x) \tilde{\Box} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right]$$

と用意しておく. これらを作用 (4.2) に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi) + f'(\phi)(R - \phi)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{\Omega^4(x)} \left[f(\phi) + f'(\phi) \left(\Omega^2(x) \tilde{R} - 6\Omega^3(x) \tilde{\Box} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right] - \phi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{f(\phi)}{\Omega^4(x)} + \frac{f'(\phi)}{\Omega^2(x)} \tilde{R} - 6 \frac{f'(\phi)}{\Omega(x)} \tilde{\Box} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right] - \frac{\phi f'(\phi)}{\Omega^4(x)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{f'(\phi)}{\Omega^2(x)} \tilde{R} - 6 \frac{f'(\phi)}{\Omega(x)} \tilde{\Box} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right] - \frac{\phi f'(\phi) - f(\phi)}{\Omega^4(x)} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる.

$$V(\phi) \equiv \frac{\phi f'(\phi) - f(\phi)}{2\Omega^4(x)} \quad (4.7)$$

とすれば

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \frac{f'(\phi)}{\Omega^2(x)} \tilde{R} - 3 \frac{f'(\phi)}{\Omega(x)} \tilde{\Box} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right] - V(\phi) \right] \quad (4.8)$$

と書ける. ここで, 共形変換のスケール因子を

$$\Omega^2(x) = f'(\phi) \quad (4.9)$$

と取ると

$$V(\phi) = \frac{\phi f'(\phi) - f(\phi)}{2[f'(\phi)]^2}, \quad (4.10)$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - 3\sqrt{f'(\phi)} \tilde{\square} \left[\frac{1}{\sqrt{f'(\phi)}} \right] - V(\phi) \right]$$

となるが、 S の第 2 項は部分積分によって

$$\begin{aligned} - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} 3\sqrt{f'(\phi)} \tilde{\square} \left[\frac{1}{\sqrt{f'(\phi)}} \right] &= - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} 3\sqrt{f'(\phi)} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{f'(\phi)}} \right] \\ &= - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} 3\sqrt{f'(\phi)} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\partial}_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{f'(\phi)}} \right] \\ &= -3\sqrt{f'(\phi)} \tilde{\partial}_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{f'(\phi)}} \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} 3 \tilde{\partial}^\mu [\sqrt{f'(\phi)}] \tilde{\partial}_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{f'(\phi)}} \right] \\ &= - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{3}{4[f'(\phi)]^2} [\tilde{\partial}^\mu f'(\phi)] [\tilde{\partial}_\mu f'(\phi)] \\ &= - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{3}{4[f'(\phi)]^2} \tilde{g}^{\mu\nu} [\tilde{\nabla}_\mu f'(\phi)] [\tilde{\nabla}_\nu f'(\phi)] \end{aligned}$$

とできる。4 番目の等号では表面項を落とした。また、スカラー場 ϕ は変換を受けないと考えて、これに直接作用する微分 $\tilde{\nabla}_\mu = \tilde{\partial}_\mu$ は通常の微分 ∂_μ と同じとして扱った。下付き添字についても同様。ゆえに

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{3}{4[f'(\phi)]^2} \tilde{g}^{\mu\nu} [\tilde{\nabla}_\mu f'(\phi)] [\tilde{\nabla}_\nu f'(\phi)] - V(\phi) \right]. \quad (4.11)$$

次に、新たな場 φ を

$$f'(\phi) = e^{\alpha\varphi} \quad \text{or} \quad \varphi = \frac{1}{\alpha} \log f'(\phi) \quad (4.12)$$

で導入する^{†2}。このとき $\tilde{\nabla}_\mu f'(\phi) = \partial_\mu [e^{\alpha\varphi}] = \alpha(\partial_\mu \varphi) e^{\alpha\varphi} = \alpha(\partial_\mu \varphi) f'(\phi)$ と計算されるので

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{3}{4} \alpha^2 \tilde{g}^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) - V(\phi(\varphi)) \right]$$

となる。そこで $\alpha = \sqrt{2/3}$ と取れば

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) - V(\phi(\varphi)) \right] \quad (4.13)$$

となり、所望の形が得られた。ここに $V(\phi(\varphi))$ は、式 (4.12) に対して式 (4.10) で与えられる表式を持つ。

4.2 具体例 1 : Starobinsky モデル

Starobinsky モデルにおいては、Lagrangian 密度および作用がそれぞれ

$$f(R) = R + \frac{R^2}{M^2}, \quad S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{R^2}{M^2} \right) \quad (4.14)$$

^{†2} 直ぐ下で $\alpha = \sqrt{2/3}$ と取る

で与えられる．これは 2.1 節で述べた一般論がそのまま使える具体的なモデルの一つである．ポテンシャル $V(\phi(\varphi))$ はどのような形をしているであろうか？ $f(\phi) = \phi + \phi^2/M^2$ より $f'(\phi) = 1 + 2\phi/M^2$ であるから，式 (4.12) より ϕ と φ との間には

$$1 + \frac{2\phi}{M^2} = e^{\alpha\varphi} \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{M^2}{2}(e^{\alpha\varphi} - 1) ; \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.15)$$

の関係がある．したがって，ポテンシャル (4.10) 中の各項を φ で表すことを考えると

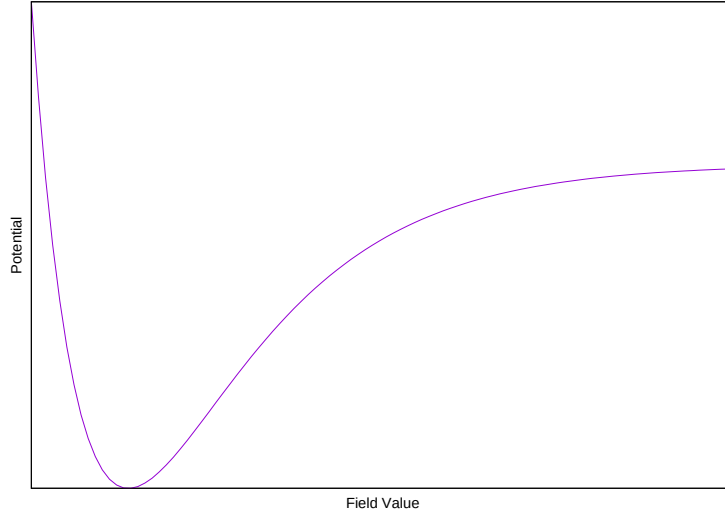
$$f(\phi) = \phi + \frac{\phi^2}{M^2} = \phi \left(1 + \frac{\phi}{M^2}\right) = \frac{M^2}{2}(e^{\alpha\varphi} - 1) \left(1 + \frac{e^{\alpha\varphi} - 1}{2}\right) = \frac{M^2}{4}(e^{2\alpha\varphi} - 1),$$

$$f'(\phi) = 1 + \frac{2\phi}{M^2} = e^{\alpha\varphi}$$

だから

$$V(\phi(\varphi)) = \frac{\phi f'(\phi) - f(\phi)}{2[f'(\phi)]^2} = \frac{M^2}{8}(1 - e^{-\sqrt{2/3}\varphi})^2 \quad (4.16)$$

を得る．下図は式 (4.16) の概形を表しており， $\varphi = 0$ に最小値を持つ．



4.3 具体例 2：Higgs- R モデル

作用が

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (M_P^2 + \xi \phi^2 R) \quad (4.17)$$

で与えられる系を考える．以下，簡単のため Planck 質量 $M_P = 1$ とする．2.1 節の一般論に書いたのと全く同じ共形変換を施すと，上の作用は

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{\Omega^4(x)} \left[1 + \xi \phi^2 \left(\Omega^2(x) \tilde{R} - 6\Omega^3(x) \tilde{\square} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right] \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\xi \phi^2}{\Omega^2(x)} \tilde{R} - \frac{6\xi \phi^2}{\Omega(x)} \tilde{\square} \left[\frac{1}{\Omega(x)} \right] + \frac{1}{\Omega^4(x)} \right]$$

と書き換えられる。ここから先まだ打ってなかったので、みなさんがんばって。

コメント

私自身も4の表題のような疑問を抱いていたので、前任のTAで現横山研D2の渡慶次さんによる補足も載せておきます。私もこれを見て勉強してみようと思います。