一般相対論補遺と演習その１０（横山）

2022 年 6 月 14 日配布・6 月 20 日提出締切・21 日解答公開予定
http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html

I　Shapiro 遅延とはどのような現象か、調べて説明せよ。

II　**その４問** II(iii) の結果を用いることにより、ロバートソン・ウォーカー計量

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \tag{1}$$

におけるリッチテンソルとスカラー曲率を計算し、アインシュタイン方程式を書き下せ。但し、エネルギー運動量テンソルは、エネルギー密度が ρ、圧力が P で与えられる完全流体であるとせよ。また、ある時刻で $\dot{a} > 0$ だったとして、その過去のすべての時刻に亘って $\rho + 3P > 0$ が成り立っていた場合、時間をさかのぼると必ず有限の時間で $a = 0$ に到達することを示せ。

III　**共形変換 Conformal Transformation** 以下の空欄を適宜埋めよ。

n 次元時空の計量 $g_{\mu\nu}$ に対し、正定値で任意回微分可能な連続関数 $\Omega(x)$ によって別の計量 $\overline{g}_{\mu\nu} \equiv \Omega^2 g_{\mu\nu}$ を定義する操作を、共形変換 (Conformal Transformation) という。このとき、任意のベクトル v^μ が、計量 $g_{\mu\nu}$ に対して時間的、空間的、光的いずれである場合を考えても、そのベクトルは計量 $\overline{g}_{\mu\nu}$ に対しても同じ性質を持つことがわかる。その意味で、計量 $g_{\mu\nu}$ を持つ時空 $\mathcal{M}$ と $\overline{g}_{\mu\nu}$ を持つ時空 $\overline{\mathcal{M}}$ は、同じ因果的構造を持つということができる。以下ではこの二つの時空は別のものとして扱い、$\overline{\mathcal{M}}$ での添え字の上げ下げは、$g_{\mu\nu}$ ではなく $\overline{g}_{\mu\nu}$ によって行うことにする。すなわち、$\overline{g}^{\mu\nu} = \boxed{\text{イ}}\, g^{\mu\nu}$ という関係が成り立つ。

$\mathcal{M}, \overline{\mathcal{M}}$ それぞれの時空で計算したクリストッフェル記号を $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}, \overline{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma}$ と書き、曲率テンソルなども同様の記法をとることにすると、以下の関係式が成り立つ。

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma} + \boxed{\text{ロ}} \tag{2}$$

$$\overline{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \boxed{\text{ハ}}\, \nabla_\mu\nabla_\nu \ln\Omega + \boxed{\text{ニ}}\, \nabla_\mu \ln\Omega \nabla_\nu \ln\Omega - g_{\mu\nu}\boxed{\text{ホ}} \tag{3}$$

$$\overline{R} = \Omega^{-2}\left[R + \boxed{\text{ヘ}}\right] \tag{4}$$

ただし、∇_μ は計量 $g_{\mu\nu}$ に関する共変微分である。

期末試験　7 月 12 日に行います。ノート・資料・教科書の持ち込み可。電子機器の使用は不可。