一般相対論 §3.4 補遺（横山）

2022 年 5 月 10 日配布
http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/g2022.html

時空が曲がっているかどうかは、一点だけを見たのではわからない。その点の周りに局所慣性系を取れるから。平坦な空間では、平行線はどんなに伸ばしても平行だが、曲がった空間ではそうはいかない。$x^\mu_{\rm ini}$ と、そこから微小距離離れた $x^\mu_{\rm ini}+\epsilon^\mu_{\rm ini}$ からそれぞれはじまる二つの測地線 $x^\mu(\tau)$ と $x^\mu(\tau)+\epsilon^\mu(\tau)$ を考えてみる。測地線方程式は、

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}=0 \tag{3.22}$$

$$\frac{d^2(x^\mu+\epsilon^\mu)}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x+\epsilon)\frac{d(x^\nu+\epsilon^\nu)}{d\tau}\frac{d(x^\rho+\epsilon^\rho)}{d\tau}=0 \tag{3.23}$$

となる。(3.21) を見れば明らかなように、これらはいずれもテンソル方程式である。

(3.23)−(3.22) をつくると、

$$\frac{d^2\epsilon^\mu}{d\tau^2}+\epsilon^\rho\partial_\rho\Gamma^\mu_{\sigma\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}+2\Gamma^\mu_{\rho\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\epsilon^\rho}{d\tau}=0 \tag{3.24}$$

ここで、$\dfrac{d}{d\tau}=\dfrac{dx^\sigma}{d\tau}\dfrac{\partial}{\partial x^\sigma}=u^\sigma\partial_\sigma$ であるが、共変性がよく見えるような微分で (3.24) を書き直す。すなわち、$u^\sigma\nabla_\sigma\equiv\dfrac{D}{D\tau}$ として、

$$\frac{D\epsilon^\mu}{D\tau}=u^\sigma\nabla_\sigma\epsilon=u^\sigma\left(\partial_\sigma\epsilon^\mu+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\epsilon^\nu\right)=\frac{d\epsilon^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\epsilon^\nu u^\sigma$$

となることから、二階微分も以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
\frac{D^2\epsilon^\mu}{D\tau^2}&=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\epsilon^\mu}{D\tau}\right)+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{D\epsilon^\alpha}{D\tau}u^\beta\\
&=\frac{d^2\epsilon^\mu}{d\tau^2}+\frac{d}{d\tau}\left(\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\epsilon^\nu u^\sigma\right)+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\frac{d\epsilon^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\epsilon^\nu u^\sigma\right)\frac{dx^\beta}{d\tau} \qquad (3.25)\\
&=\frac{d^2\epsilon^\mu}{d\tau^2}+u^\gamma\Gamma^\mu_{\nu\sigma,\gamma}\epsilon^\nu u^\sigma+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{d\epsilon^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\epsilon^\nu\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{d\epsilon^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\epsilon^\nu\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\\
&=\frac{d^2\epsilon^\mu}{d\tau^2}+\partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\epsilon^\rho\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}+2\Gamma^\mu_{\rho\nu}\frac{d\epsilon^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}-\Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\epsilon^\rho\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\epsilon^\rho\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}
\end{aligned}$$

(3.24) と (3.25) より、

$$\frac{D^2\epsilon^\mu}{D\tau^2}+(\partial_\rho\Gamma^\mu_{\sigma\nu}-\partial_\nu\Gamma^\mu_{\sigma\rho}+\Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}-\Gamma^\mu_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\rho})\epsilon^\rho\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0$$

すなわち

$$\frac{D^2\epsilon^\mu}{D\tau^2}+R^\mu_{\sigma\rho\nu}u^\sigma\epsilon^\rho u^\nu=0 \tag{3.26}$$

となる。これが測地線偏差の式である。