一般相対論 §3.8 補遺（横山）
エネルギー運動量テンソルの現象論的定義

2022 年 5 月 24 日配布

http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/˜yokoyama/g2022.html

局所慣性系において応力テンソル T^{ij} を 4 次元化することを考える。そもそも、T^{ij} とは、x^j 軸と直交した単位面積を単位時間あたりに流れる運動量の第 i 成分のことである。それに対し、保存則 $\overline{T}^{ab}_{,b} = 0$ を要求しよう。まず、空間成分は

$$\overline{T}^{ib}_{,b} = \overline{T}^{i0}_{,0} + \overline{T}^{ij}_{,j} = 0. \tag{3.45}$$

直交座標系なら $j = i$ のときのみ x^j 面と直交した面を通る運動量が存在する。$(x^i, x^i + \Delta x^i)$ の微小領域で積分すると、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{T}^{i0}}{\partial t}\Delta x^i + \overline{T}^{ii}(x^i + \Delta x^i) - \overline{T}^{ii}(x^i) = 0 \tag{3.46}$$

となるが、この第二項は面 $x^i + \Delta x^i$ から出て行く運動量、第三項は x^i に入ってくる運動量なので、第一項はこの範囲に単位時間に発生する i 方向の運動量密度ということになる。つまり、$\dfrac{1}{c}\overline{T}^{i0}$ は運動量密度の第 i 成分である。

すると、第 0 成分 $\overline{T}^{00}$ としてはエネルギー密度を考えれば良いことがわかる。次に、保存則の時間成分を考えると、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{T}^{00}}{\partial t} + \overline{T}^{0j}_{,j} = 0 \tag{3.47}$$

となるので、$c\overline{T}^{0j}$ は x^j 軸と直交した面を貫くエネルギー流束 (エネルギー密度) であるとわかる。

以上より、

$$\begin{array}{ll} \overline{T}^{00} & \text{エネルギー密度} \\ \overline{T}^{i0} & \text{運動量密度} \times c \\ \overline{T}^{0j} & \text{エネルギー流束}/c \\ \overline{T}^{ij} & \text{応力　運動量流束} \end{array} \tag{3.48}$$

という意味を持っていることがわかる。これを一般座標変換に対するテンソルの局所慣性系での表現と見なせば、曲がった時空での $T^{\mu\nu}$ を構成することができる。