

電磁気学 A レポート問題その3 一部の解答例

8



の核分裂ではおよそ 200MeV のエネルギーが放出されるらしい。

このエネルギーのおおまかな起源を理解するため、原子核を一様密度に帯電した球と見なして静電エネルギーの変化を求め、だいたい 200MeV に一致することを示せ。

解答

一様密度に帯電した、電荷 Q 、半径 R の球の電場は、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & 0 < r < R \end{cases} \quad (2)$$

よって、静電エネルギーは

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV &= \frac{1}{2} \epsilon_0 4\pi \left(\int_0^R E^2(r) r^2 dr + \int_R^\infty E^2(r) r^2 dr \right) \\ &= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

質量数 M は核子の個数であるから、原子核の半径は質量数の $1/3$ に比例すると考えられる（液滴模型）。陽子の半径はだいたい 2fm であるから、欲しい原子核の半径は $R \sim 2M^{1/3}\text{fm}$ となる。

電荷 Q は原子番号に素電荷 e をかけたものである。

値の見積もりには、微細構造定数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ と、 $\hbar c \simeq 200\text{MeV}\cdot\text{fm}$ を覚えておくとよい。

よって、核分裂の前後での静電エネルギーの変化は、

$$\begin{aligned} &\frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} \left(\frac{92^2}{2 \times 235^{1/3}} - \frac{39^2}{2 \times 95^{1/3}} - \frac{53^2}{2 \times 139^{1/3}} \right) / \text{fm} \\ &\simeq \frac{1}{137} 200 \frac{3}{5} \left(\frac{92^2}{2 \times 235^{1/3}} - \frac{39^2}{2 \times 95^{1/3}} - \frac{53^2}{2 \times 139^{1/3}} \right) \text{MeV} \\ &\sim 200\text{MeV} \end{aligned} \quad (4)$$

となり、期待された値になった。

15 一様磁場を与えるベクトルポテンシャルを求めよ。

解答

一様磁場は、適当に座標系を回転させれば、 z 成分以外は0にできる。よって、

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z \end{cases} \quad (5)$$

を解けばよい。

ここで、ゲージ変換を考える。任意の関数 $f(x, y, z)$ によって、 $\mathbf{A}'(x, y, z) = \mathbf{A}(x, y, z) - \nabla f(x, y, z)$ とゲージ変換できるが、これを使うと $A'_z(x, y, z) = 0$ にできることがわかる。よって、

$$\begin{cases} -\frac{\partial A'_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A'_x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y} = B_z \end{cases} \quad (6)$$

となり、上の二つの式から A'_x と A'_y は z によらないことがわかる。つまり、 $A'_y = A'_y(x, y)$ 、 $A'_x = A'_x(x, y)$ 。

またゲージ変換を考える。 $A'_z(x, y, z) = 0$ の条件を壊さないようにまだゲージ変換できる。それは、 z によらない任意の関数 $f'(x, y)$ をもちいて、 $\mathbf{A}''(x, y, z) = \mathbf{A}'(x, y, z) - \nabla f'(x, y)$ である。これを使うとさらに $A''_y(x, y) = 0$ にできることがわかる。

さらに、 $A''_z(x, y, z) = 0$ 、 $A''_y(x, y) = 0$ を壊さずにさらにゲージ変換できる。 $\mathbf{A}'''(x, y, z) = \mathbf{A}''(x, y, z) - \nabla f''(x)$ である。これを使うと、さらに $A'''_x(x, y)|_{y=0} = 0$ にできることがわかる。

よって、残っている式は、

$$-\frac{\partial A'''_x(x, y)}{\partial y} = B_z \quad (7)$$

であるから、 $A'''_x = -yB_z$ となる。

よって、ゲージ自由度をのぞいて、

$$\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} -yB_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

に一意に決まった。

17 静磁場のもつエネルギー密度について、簡単に導出しながら説明せよ。

解答

静磁場のもつエネルギー密度を導出したいと考えたとすると、静電場のときのように、静磁場を作るためにどれだけのエネルギーを要したかを調べるのがわかりやすい。さらに、一様磁場なら、エネルギーを体積で割るだけでエネルギー密度が求まって、簡単である。

一様磁場を作るものでよく知られているのはソレノイドであるから、ソレノイドで考える。

ソレノイドの長さを l 、単位長さあたりの巻き数を n 、巻く円の面積を S 、電流を I とする。

ソレノイドの内部の磁場は $B = \mu_0 n I$ であり、外部の磁場は 0 である。ソレノイドを貫く磁束は $\Phi = B S n l$ で、誘導起電力は $V = -d\Phi/dt$ である。

抵抗を無視すると、誘導起電力に逆らって電圧を加えるので、それによる仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int -V(t)I(t)dt = \mu_0 n^2 S l \int I(t) \frac{dI(t)}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 S l n^2 I^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} S l \end{aligned} \tag{9}$$

である。

次に電流を 0 まで下げていくと、今度は誘導起電力が逆向きになって、はじめ与えた仕事の分だけ仕事をするようになる（上と全く同じ式）。つまり、エネルギーが保存している。

誘導起電力は磁場によって引き起こされていると考えると、途中蓄えられていたエネルギーを、磁場が持っているとして解釈することができる。

よって、静磁場 B のもつエネルギー密度は $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$ と考えられる。

文責：TA 山田