

電磁気学 A レポート問題その2 解答例

1. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta$ を示す。

$$\begin{aligned}
 (RHS) &= \{|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2\}^{1/2} \\
 &= \{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2\}^{1/2} \\
 &= \{A_x^2 B_y^2 + A_x^2 B_z^2 + A_y^2 B_x^2 + A_y^2 B_z^2 + A_z^2 B_x^2 + A_z^2 B_y^2 \\
 &\quad - 2(A_x A_y B_x B_y + A_x A_z B_x B_z + A_y A_z B_y B_z)\}^{1/2} \\
 &= \{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2\}^{1/2} \\
 &= (LHS)
 \end{aligned} \tag{1}$$

次に、右ねじの方向であることを示す。

まず、 $\mathbf{A}$ と直交することは、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \epsilon_{ijk} A_i A_j B_k = 0$ から言える。 $\mathbf{B}$ に対しても同様。

いまの直積の定義から、直交座標の基底ベクトルが $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$ となることを用いると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A_i B_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \\
 &= A_i B_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j
 \end{aligned} \tag{2}$$

一方、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_i \mathbf{e}_i) \times (B_j \mathbf{e}_j) \tag{3}$$

となるので、分配法則が使えることがわかる。

よって、分配法則と $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$ (基底ベクトルが右ねじ) から、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ も右ねじの向きになることがわかる。((3)、(2) 式を下から上に見よ。)

2. 正しい解は教科書 p214 を参照。

わかりやすくするために、添字を数字にして書いてみる。異なる数字のときは $\neq$ 、アルファベットで書いた添字は任意でよい、ということにする。

左辺が 0 でないのは、各 ϵ の添字がすべて異なる時のみで、 $\epsilon_{123}\epsilon_{123} = 1$ のパターンか、 $\epsilon_{123}\epsilon_{132} = -1$ のパターンだけである。このとき、右辺もそれぞれ 1, -1 となって、一致する。

その他のときは左辺は 0 である。 ϵ の 2、3 個目の添字が同じとき、つまり $\epsilon_{122}\epsilon_{1lm}$ のときは、右辺は $\delta_{2l}\delta_{2m} - \delta_{2m}\delta_{l2} = 0$ 。添字の対称性から、 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{122}$ も同様。

1 つの ϵ の添字がすべて異なるときは、まず、 $\epsilon_{123}\epsilon_{112}$ のときは、右辺は $\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{22}\delta_{31} = 0$ 。 $\epsilon_{123}\epsilon_{113}$ のときは、右辺は $\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{31} = 0$

これで尽くされている。

3. (1) 第1成分について考えれば十分。微分は可換であるから、

$$(\nabla \times \nabla \phi)_1 = \epsilon_{1jk} \partial_j \partial_k \phi = \partial_2 \partial_3 \phi - \partial_3 \partial_2 \phi = 0 \quad (4)$$

(2) 同じ理由で、

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0 \quad (5)$$

(3) 微分は両方にかかることに注意して、

$$(LHS) = \epsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) = B_k \epsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k = (RHS) \quad (6)$$

(4)

$$(LHS) = \partial_i (\phi E_i) = (\partial_i \phi) E_i + \phi \partial_i E_i = (RHS) \quad (7)$$

(5)

$$(LHS)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi \mathbf{A})_k = \epsilon_{ijk} [(\partial_j \phi) A_k + \phi \partial_j A_k] = (RHS)_i \quad (8)$$

(6) 前問の公式を使って、

$$\begin{aligned} (LHS)_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = (RHS)_i \end{aligned} \quad (9)$$

4. 【以下は教科書そのままの悪い回答例で、零点】

例えば、p245の章末問題のIV.2(ロ)なら、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (10)$$

なぜなら、 $\mathbf{r}$ は動径方向のベクトルで、 $d\mathbf{r}$ は円の接線方向のベクトルであり、両者は直交するので内積は0になるからである。

5. 教科書と同様に微小の積分路を4つの辺に分けると、

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \int_x^{x+\Delta x} F_x(x', y, z + (x' - x) \tan \theta) dx' \\ & \quad + \int_z^{z+\Delta z} F_z(x + (z' - z)/\tan \theta, y, z') dz' \\ &= F_x(x + \Delta x/2, y, z + \Delta z/2) \Delta x + F_z(x + \Delta x/2, y, z + \Delta z/2) \Delta z \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ほかの辺も同様にして加えると、

$$\begin{aligned}
& \oint_L \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\
&= \int_x^{x+\Delta x} F_x(x', y, z + (x' - x) \tan \theta) dx' \\
&\quad + \int_z^{z+\Delta z} F_z(x + (z' - z)/\tan \theta, y, z') dz' \\
&\quad + \int_y^{y+\Delta y} F_y(x + \Delta x, y', z + \Delta z) dy' \\
&\quad + \int_{x+\Delta x}^x F_x(x', y + \Delta y, z + (x' - x) \tan \theta) dx' \\
&\quad + \int_{z+\Delta z}^z F_z(x + (z' - z)/\tan \theta, y + \Delta y, z') dz' \\
&\quad + \int_{y+\Delta y}^y F_y(x, y', z) dy' \\
&= F_x(x + \Delta x/2, y, z + \Delta z/2) \Delta x \\
&\quad + F_z(x + \Delta x/2, y, z + \Delta z/2) \Delta z \\
&\quad + F_y(x + \Delta x, y + \Delta y/2, z + \Delta z) \Delta y \\
&\quad - F_x(x + \Delta x/2, y + \Delta y, z + \Delta z/2) \Delta x \\
&\quad - F_z(x + \Delta x/2, y + \Delta y, z + \Delta z/2) \Delta z \\
&\quad - F_y(x, y + \Delta y/2, z) \Delta y \\
&= \frac{1}{\Delta y} [F_x(x + \Delta x/2, y, z + \Delta z/2) - F_x(x + \Delta x/2, y + \Delta y, z + \Delta z/2)] \Delta x \Delta y \\
&\quad + \frac{1}{\Delta y} [F_z(x + \Delta x/2, y, z + \Delta z/2) - F_z(x + \Delta x/2, y + \Delta y, z + \Delta z/2)] \Delta y \Delta z \\
&\quad + \frac{1}{\Delta x} [F_y(x + \Delta x, y + \Delta y/2, z + \Delta z) - F_y(x, y + \Delta y/2, z + \Delta z)] \Delta x \Delta y \\
&\quad + \frac{1}{\Delta z} [F_y(x, y + \Delta y/2, z + \Delta z) - F_y(x, y + \Delta y/2, z)] \Delta y \Delta z \\
&= \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] (-\Delta y \Delta z) + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] (\Delta x \Delta y) \\
&= \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] (-\sin \theta) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} \Delta y + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \cos \theta \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} \Delta y \\
&= [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \Delta S \\
&= \int_{\Delta S} [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS
\end{aligned} \tag{12}$$

となり、成り立つ。

文責：TA 山田