電磁気学Aレポート問題その1　解答例

1. 問題文にしたがって、座標系の回転に対して内積が不変であることを示す。
   対称性から、z軸まわりの回転に対して不変であることを示せばよい。
   この回転に対して、ベクトルは
   $$\begin{aligned}\boldsymbol{A'} &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ &= \begin{pmatrix}A_x\cos\theta - A_y\sin\theta\\ A_x\sin\theta + A_y\cos\theta\\ A_z\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1}$$
   となる。$\boldsymbol{B'}$ も同様である。よって、内積は
   $$\begin{aligned}\boldsymbol{A'}\cdot\boldsymbol{B'} &= (A_x\cos\theta - A_y\sin\theta)(B_x\cos\theta - B_y\sin\theta)\\ &\quad + (A_x\sin\theta + A_y\cos\theta)(B_x\sin\theta + B_y\cos\theta) + A_zB_z\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned} \tag{2}$$
   となり、不変であることが示された。

2. p209 参照。
   $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\perp + \boldsymbol{v}_\parallel$
   として、
   $\boldsymbol{v}_\parallel = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$
   $\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$
   である。

3. ベクトルであるかどうかは、座標系の並進と回転に対してベクトルとして変換することを言えばよい。
   座標系を回転させると、座標値は逆回転されることに注意すると、
   $$\boldsymbol{r'} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{r} \tag{3}$$
   となり、微分は
   $$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z'}\\ &= \cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial x'} - \sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial y'}\end{aligned} \tag{4}$$

となる。$\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ も同様に計算すると、

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial x'} - \sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial y'}\\ \sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial x'} + \cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial y'}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z'}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x'}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y'}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z'}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

のようにまとまり、グラディエントが座標系の回転に対してベクトルのように変換することが示された。

また、並進変換では微分は変わらないので、並進変換に対してもベクトルとして変換していることがわかる。

よって、グラディエントはベクトル量である。

（別解）「議論せよ」なので、議論だけで示してみる。

グラディエントは

$$f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = \nabla f\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{6}$$

である。ただし、この時点ではグラディエントはベクトルかどうかわかっていないが、形式的に内積の形に書いた。

最左辺はスカラー関数の微小二点間の差になっており、スカラー量である。最右辺はグラディエントと変位ベクトルの内積の形になっているが、変位ベクトルはベクトルであるから、座標系の回転に対してベクトルとしての変換性を持つ。問題 1 の結果を参照すると、この内積がスカラー量になるためには、グラディエントがベクトルとしての変換性を持たなければならない。よって、グラディエントはベクトルである。

4. p220 からの議論をまとめればよい。

   $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ が流れを表すベクトル場とすると、その発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ は、点 $\boldsymbol{r}$ を含む微小領域から流出する量を単位体積当たりの値で表したものになる。

5. 二次元空間で、S を二次元領域として、

$$\int_S\left(\frac{\partial E_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y)}{\partial y}\right)dS = \int_l \boldsymbol{E}(x,y)\cdot\boldsymbol{n}(x,y)dl \tag{7}$$

   となることが予想される。ただし、$\boldsymbol{n}(x,y)$ は S の境界 $l=\partial S$ 上の外向き法線ベクトルである。

   p241 を参照しながらこれを示す。

微小面積の長方形で考えると、右辺は、

$$\begin{aligned}
&= \int_y^{y+\Delta y} (E_x(x+\Delta x, y) - E_x(x,y))dy + \int_x^{x+\Delta x} (E_y(x, y+\Delta y) - E_y(x,y))dx \\
&= (E_x(x+\Delta x, y) - E_x(x,y))\Delta y + (E_y(x, y+\Delta y) - E_y(x,y))\Delta x \\
&\to \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) dS
\end{aligned} \tag{8}$$

となり、左辺に一致する。

微小でない領域では、微小面積の長方形に分割して和をとればよい。

6. 証明は略。p241 参照。前問のようにやればよい。

具体例は、たとえば $\boldsymbol{E(r)} = (x^2 + y^2, y + z, z^3)$ で、領域 $0 \leq x \leq L,\ \ 0 \leq y \leq L,\ \ 0 \leq z \leq L$ の積分を考えると、$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E(r)} dV = \int_S \boldsymbol{E(r)} \cdot \boldsymbol{n(r)} dS$ の左辺は

$$= \int (2x + 1 + 3z^2) dV = L^2(L^2 + L + L^3) \tag{9}$$

右辺は

$$= \int (L^2 + y^2 - y^2) dydz + \int (L + z - z) dxdz + \int (L^3 - 0) dxdy = L^2(L^2 + L + L^3) \tag{10}$$

となり、一致する。

文責：TA 山田