を**ポインティングベクトル**という。ポインティングというのは指さすという意味ではなく，人名である。(10.14) の右辺の第 2 項は電磁場のエネルギーの時間変化率を表し，§6.5 で述べた静電場のエネルギー密度がそのまま現れている。また，117 ページで簡単な場合について与えた磁場のエネルギー密度の表式が一般の場合についても正しいことが，これによって確認できたといえる。すなわち，電磁場のエネルギー密度は，

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{10.16}$$

で与えられるのである。

このように，電磁場はエネルギーを持ち，エネルギーを運ぶことのできる物理的実体として捉えなければならないことがわかった。§6.5 の段階では，エネルギーを担っているのが電荷であると考えても，静電場であると考えても，どちらでも同じことだったが，このように時間依存性のある系では，電磁場の持つエネルギーを無視することはできないのである。

10.4　電磁波

波動方程式の導出

それでは，電磁場のエネルギーはどのように伝播するのだろうか。ここでは，それを考えるため，マクスウェル方程式を変形することを考える。

まず，(10.3) の両辺のローテーションをとる。右辺は (10.4) により，

$$-\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

左辺の方は 102 ページで証明した公式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} \tag{8.32}$$

に (10.1) を用いて，

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho - \nabla^2\boldsymbol{E}$$

となる。双方合わせて，以下の式を得る。

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \tag{10.17}$$

同様に，(10.4) のローテーションをとる。(8.32) を磁場について立て

た公式と，(10.2)，(10.3) を用いることにより，

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0\nabla\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \tag{10.18}$$

が成り立つことがわかる。とくに，真空中では $\rho(\boldsymbol{r},t)=0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ となるので，

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0} \tag{10.19}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0} \tag{10.20}$$

が成り立つ。ただし，

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{10.21}$$

とした。このような形の微分方程式を**波動方程式**という。

波動方程式の解

波動方程式 (10.19)，(10.20) の解を求めてみよう。一番簡単なのは，面対称な平面波解である。まず，電場が y, z によらず，x 方向に伝播する場合を考える。$\boldsymbol{E} = (E_x(x,t), E_y(x,t), E_z(x,t))$ として，波動方程式に代入すると，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_j(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mp\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_j(x,t)$$
$$= 0\quad（複号同順）\quad j = x, y, z \tag{10.22}$$

となり，この偏微分方程式の解は一般に，

$$E_j(x,t) = f_{j+}(x-ct) + f_{j-}(x+ct) \tag{10.23}$$

と書けることがわかる。$f_{j\pm}(u)$ は任意関数である。

例題10.3

このことを確かめよ。

解　合成関数の微分法の公式により，$f_{j+}(u)$，$u = x - ct$ に対し，$\dfrac{\partial f_{j+}}{\partial x} = f'_{j+}(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'_{j+}(u)$, $\dfrac{\partial f_{j+}}{\partial x} = f'_{j+}(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = f'_{j+}(u)(-c)$ が成り立つ。したがって，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)f_{j+}(u) = 0$$

が成り立ち，$f_{j+}(x-ct)$ は波動方程式を満たすことがわかる。$f_{j-}(x+ct)$ についても (10.22) の復号の下側をとった式が成り立つことが同様に示せる。 ■

さて，関数 $f_{j+}(u)$，$u=x-ct$ の表す波の解において時刻を Δt 進めたとき，それに応じて座標 x を $\Delta x = c\Delta t$ だけ増やせば，$u=x-ct$ は同じ値を保つことになる。つまり，時刻 t において座標 x にあった波形は，時刻 $t+\Delta t$ には，そのままの形で座標 $x+c\Delta t$ に移動していることになる。これによって，この解は x の正の向きに速さ c で進む波を表していることがわかる。同じように $f_{j-}(x+ct)$ は，同じ速さで x の負の向きに進む波を表すことがわかる。

真空中では (10.1) は $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ となり，これは今の場合，

$$\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial x} = f'_{x+}(x-ct) + f'_{x-}(x+ct) = 0$$

と書けるので，$E_x(x,t)$ は x, t によらない定数になることがわかる。ここでは波動解を求めたいので，これは 0 と置いてよい。また，以下では x の正の向きに進む波に注目することにすると，$\boldsymbol{E} = (0, f_{y+}(x-ct), f_{z+}(x-ct))$ と書ける。これを用いて，(10.3) から磁場の時間微分を求めると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = (0, f'_{z+}(x-ct), -f'_{y+}(x-ct))$$

となる。今，時間依存性のある部分にしか興味がないので，この式を時間積分する際，積分定数はすべて 0 とすると，

$$\boldsymbol{B} = \left(0, -\frac{1}{c} f_{z+}(x-ct), \frac{1}{c} f_{y+}(x-ct)\right) \tag{10.24}$$

$$\boldsymbol{E} = (0, 0, f_{y+}(x-ct), f_{z+}(x-ct)) \tag{10.25}$$

という組み合わせが得られることがわかる。この波は図 10.1 のようにポインティングベクトルの向きに進む**横波**であることがわかる。また $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$ となることから，電場と磁場は常に直交していることもわかる。これを**電磁波**という。

さらに，この波の速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \left(8.854\times10^{-12}\left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\right]\times 4\pi\times10^{-7}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}\right]\right)^{-1/2} = 2.998\times10^8\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \tag{10.26}$$

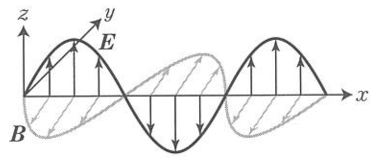

図10.1　電磁波の伝播

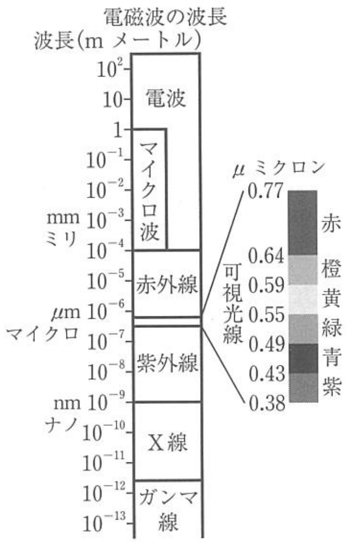

図10.2　電磁波のスペクトル

となり，光速に等しいことがわかる。

この 2 つの性質により，光は電磁波の一種であることがわかった。電磁波は波長に応じて図 10.2 のようにさまざまな性質を示す。

また，$|\boldsymbol{E}| = c|\boldsymbol{B}|$ が満たされるので，

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}c^2\boldsymbol{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{10.27}$$

となり，電場と磁場の間ではエネルギーが等分配されていることがわかる。

10分補講

マックスウェルの生家

電磁気学の基礎法則をマクスウェル方程式にまとめ上げたジェームズ・クラーク・マックスウェル[1]は，1831 年 6 月 13 日，スコットランドはエジンバラ市のインド通り 14 番地で，科学者や芸術家などを輩出してきたクラーク家の子孫として生まれた。姓にマックスウェルがついたのは，彼の祖父ジョージがドロシー・マックスウェルと結婚し，クラーク・マックスウェルという姓を名乗るようになったためである。しかし，