# 解析力学中間試験（横山）

2016 年 10 月 17 日実施
http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/AM2016.html

## 実施要項と注意事項

1. 本紙は試験開始の合図があるまで裏返してはならない。
2. 配布物は、問題用紙 (この紙) 1 枚、解答用紙 2 枚 (追加不可)、計算用紙 1 枚である。
3. 提出物は、解答用紙 2 枚 (両面使用)、事前の指示に基づき各自用意した A4 版 10 ページまでの参照資料である。
4. 各解答用紙ならびに参照資料には、学籍番号・氏名等の所要事項と共に、連絡の取りやすいメールアドレスを明記すること。（採点上必要が生じた場合には、連絡の上、説明を求めます。）
5. 計算の必要な問題については、結果だけでなく、解答用紙の紙幅内で、途中経過を目で追える程度に詳細に書くこと。
6. 事前の指示に基づき各自用意した A4 版 10 ページまでの参照資料のみ参照を可とする。
7. 試験室内での通信機器・電子機器の使用は、他の迷惑となるので、禁止とする。
8. **解答できない問題は、各自適宜問題を変更して再定義した上で解答すること。**
   その際、どのような状況設定のもとで解いたか明示すること。

以上

**試験問題は裏面に記載**

# 問　題

**I**　ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ 中を運動する質量 $m$ の粒子に対するニュートンの運動方程式から、この粒子の運動を与えるラグランジアンとオイラーラグランジュ方程式を導出せよ。

**II**　変分法でオイラーラグランジュ方程式を導出する際、変分操作 $\delta$ と時間微分が可換であること、すなわち

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x(t)$$

が成り立つことを説明せよ。これが成り立つおかげで、はじめ $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ について独立に変分を取っていたのに、最終的には $x(t)$ のみの変分によってオイラーラグランジュ方程式が導出できた。これは正しいことをやっていることになっているのだろうか？　考察してみよ。

**III**　水平方向に $x$ 軸、鉛直 下向き に $y$ 軸を取る。重力加速度 $g$ の一様重力場中で原点と点 $(x_f, y_f)$ $(x_f > 0, y_f > 0)$ を結ぶ曲線に沿って粒子がなめらかに滑り落ちるとき、到達所要時間が最短となるような曲線を求める、といういわゆる最速降下線の問題を考えよう。以下の各 $\boxed{\text{箱}}$ に入る適切な数式を解答せよ。

$y$ を独立変数に取ると、曲線の微小距離 $ds$ は $ds = \boxed{\text{イ}}$ で与えられる。エネルギー保存則より $y$ における粒子の速さ $v$ は $v = \boxed{\text{ロ}}$ となるので、曲線に沿って $ds$ 進むのに要す時間 $dt$ は $dt = \boxed{\text{ハ}}\,dy$ で与えられる。したがって、全所要時間 $t_f$ を極小にする曲線 $x = x(y)$ は、オイラーラグランジュ方程式

$$\boxed{\text{ニ}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\boxed{\text{ホ}} = 0$$

を満たす。したがって、$\boxed{\text{ホ}}$ = 定数、となる。この定数を $\dfrac{1}{\sqrt{4ga}}$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \boxed{\text{ヘ}}$ となるので、$y = a(1-\cos\theta)$ という変数変換を行うことにより、この微分方程式は積分できて、$(x, y)$ は、パラメタ $\theta$ によって $x = \boxed{\text{ト}}$, $y = \boxed{\text{チ}}$ と表すことができる。これはサイクロイドを表す。$\theta$ が $|\theta| \ll 1$ の範囲を満たす値しか取らない場合、$x_f, y_f$ を用いて $a = \boxed{\text{リ}}$ と表すことができる。

**IV**　張力 $S$ で張られた線密度 $\sigma$ のゴム紐の微小運動を記述する運動方程式をダランベールの原理を用いて導出せよ。

**V**　鉛直方向に軸を持ち原点を頂点とする回転放物面 $x^2 + y^2 \equiv r^2 = 2az$ $(a > 0)$ 上を滑らかに動く質点の運動を考える。質点が水平な円周上を定常運動する解を求め、その周りの微小振動を議論せよ。直交座標 $(x, y, z)$ ではなく、円筒座標 $(r, \theta, z)$ を用いること。

以上