解析力学補遺と練習その１（横山）

2016 年 10 月 24 日実施
http://www.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/AM2016.html

補遺と問題 (§15 正準変換)

（続き）　さらに、

$$W''' = W + \sum_i P_i Q_i - \sum_i p_i q_i \tag{15.18}$$

とすると、

$$dW''' = \boxed{\text{イ}} \tag{15.19}$$

$$q_i = \boxed{\text{ロ}}, \quad Q_j = \frac{\partial W''}{\partial P_j}, \quad H' = \boxed{\text{ハ}} \tag{15.20}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = \boxed{\text{ニ}} \tag{15.21}$$

が得られる。

例１：点変換

$$W'(q_*, P_*, t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(q_*) P_i \tag{15.22}$$

とすると、(15.12) より、

$$p_j = \boxed{\text{ホ}} = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\text{ヘ}} \tag{15.23}$$

$$Q_j = \boxed{\text{ト}} = f_j(q_*) \tag{15.24}$$

となり、この母関数は点変換を与えることがわかる。とくに、$f_i(q_*) = q_i$ とすると、$Q_j = \boxed{\text{チ}}$ となり、(15.23) より、$p_j = \boxed{\text{リ}}$ となることもいえるので、これは $\boxed{\text{ヌ}}$ 変換であることがわかる。

例２ 正準変換の母関数を

$$W(q_*, Q_*, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i \tag{15.25}$$

とすると

$$p_j = \boxed{\text{ル}} = \boxed{\text{ヲ}}, \quad P_j = \boxed{\text{ワ}} = \boxed{\text{カ}} \tag{15.26}$$

となり、この生成関数は座標と運動量を入れ替えるような正準変換を与えることがわかる。このように、ハミルトン形式では座標と運動量という名は実質的な意味を持たず、互いに共役な関係にある二つの変数、ということでしかない。($\boxed{\text{ル}}$ と $\boxed{\text{ワ}}$ は W の偏微分によって表すこと。)

解　答　例

$\boxed{\text{イ}} = -\sum_i q_i dp_i + \sum_i Q_j dP_j + (H' - H)dt$

$\boxed{\text{ロ}} = -\dfrac{\partial W'''}{\partial p_i}$

$\boxed{\text{ハ}} = H + \dfrac{\partial W'''}{\partial t}$

$\boxed{\text{ニ}} = -\dfrac{\partial Q_j}{\partial p_i}$

$\boxed{\text{ホ}} = \dfrac{\partial W'}{\partial q_j}$

$\boxed{\text{ヘ}} = \dfrac{\partial f_i(q_*)}{\partial q_j} P_i$

$\boxed{\text{ト}} = \dfrac{\partial W'}{\partial P_j}$

$\boxed{\text{チ}} = q_j$

$\boxed{\text{リ}} = P_j$

$\boxed{\text{ヌ}} = \text{恒等}$

$\boxed{\text{ル}} = \dfrac{\partial W}{\partial q_j}$

$\boxed{\text{ヲ}} = Q_j$

$\boxed{\text{ワ}} = -\dfrac{\partial W}{\partial Q_j}$

$\boxed{\text{カ}} = -q_j$

以上。
期末試験は 11 月 14 日の講義中に行います。参照資料の持ち込み不可。