

解析力学スケルトン版

横山順一

誤植はそのまま残してあるので講義中に修正を受けて下さい。内容に関する一切の保証は致しません。

§0 力学とは何か

物理学の諸分野の中で最も古く、最も単純であり、またそのため他の多くの分野を理解するための基礎であるとも考えられているのは、物体の運動と平衡を研究する分野である。それを力学という。

§1 ニュートンの古典力学

「プリンキピア 自然哲学の数学的語原理」の中に述べられている。

(定義Ⅰ) 物理量 (quantitas materie)

物質の密度と大きさをかけて得られる物質の測度 (循環論法である)

(定義Ⅱ) 運動量 (quantitas motus)

速度と物質量をかけて得られる運動の測度

(絶対) 空間と (絶対) 時間

ニュートンはこれらをきちんと定義せずさりげなく述べた。

空間： いかなる外的事物にも無関係に、常に同形不動のものとして存続する。

時間： 絶対的な、真の、数学的な時間はその本性に従って一様に外部の何ものにも無関係にそれ自ら流れていくもので、別の名を持続という。相対的な、見かけ上の、日常的な時間は、運動によって持続を計るための知覚できる外部的な一つの尺度である。それは真の時間の代わりに、時日月年などのように日常的に使われている。

ニュートンのこの時間の定義に対するエルンスト・マッハの批判

私たちはものの変化を直接時間に即して測ることはできない。むしろ逆に時間は、ものが変化することから私たちが引き出した抽象なのだ。

<運動の法則>

法則Ⅰ：慣性の法則

外力が働かなければすべての物体は、静止または等速直線運動をし続ける。

(運動状態と静止状態の同等性にかかわる)

法則Ⅱ：運動方程式

運動の変化は、及ぼされる駆動力に比例し、質量に反比例する。

法則Ⅲ：作用・反作用の法則

二つの物体の相互の作用は常に逆向きで同じ大きさを持つ

これからやる解析力学には、何某の原理と呼ばれるものが数多くでてくるが、法則としてはこれらニュートンを超える内容をもったものは何一つない。

§2 力学のこれまでとこれから

高校の力学の典型的な問題

粗い斜面上においた物体の運動

働く力

動力 $-Mg$

垂直抗力 N

摩擦力 T

斜面方向

垂直方向

動摩擦係数 μ' を与えると、 $T = \mu' N$ となり a, N, T という未知数に対して式が3つ得られて解ける。

x, y 軸方向に運動方程式をたてると、

斜面上を動くから

これで解ける。

運動方程式は

あるいは

というベクトル方程式によって表現される。

この出自は既知のこととしてここでは問わないが、力 の各項を与えて、(2.1) を

微分方程式として解けば力学の問題は解けたことになる。

働く力

重力 Mg — 保存力であり、ポテンシャルから $F_g =$ と導かれる

抗力 N

摩擦力 T

のうち物理学の基本力に直接立脚しているのは重力だけである。

↘拘束条件のあらわれ

抗力 N : 運動の方向を斜面の向きに制限する役目を果たしているが、その起源は物体と斜面の接触面での各原子のまわりの電子どうしに働くクーロン力(反発力)である。

摩擦力も同様に電磁気的な力を起源とする現象論的な力である。

摩擦 — エネルギーが散逸する

ミクロな自由度に流れていく。巨視的には発熱として観測される

→ 今注目していない自由度が関係した運動である

摩擦は取り扱いが大変難しい。本講義では扱わない。

力学現象を基礎物理学として一般化し、数学的に記述することを目指す。

§3 ベクトルとスカラー

スカラー量 : 大きさだけを持っている 1 成分

ベクトル量 : 大きさと向きを持っている 空間ベクトルなら 3 成分

と習っていますが、ベクトルとスカラーのちがいは成分の数ではない。

座標系を取り替えた時に、どう変換されるか、その変換性の違いである。

スカラー量

幾何学的に同じ点ならどういう座標系で見ても値は同じ

ベクトル量 みかたによって値が変わる

したがって、速度ベクトル の第一成分 は一つの量ではあっても当然スカラー量ではない。

(3.2)

平面上の運動に限ると、 x と y の式だけが必要
これを極座標 (r, θ) で表すことを考える。

(3.3) と分解できる

(3.2)は Fr と をつかって、

(3.4)

と書ける。

ので、このような複雑な形になる。

(3.5)

というような形にはならず、座標の定義の仕方によって運動方程式の見かけが随分変わってしまって不便である。

§ 4 仮想仕事の原理・仮想変位の原理・ダランベールの原理

ベクトル量で運動を記述するのは不便なので、座標系の取り方によらないスカラー量で運動を記述したい。

ベクトルからつくるスカラー量として、ベクトルの内積を考える。

まずは静力学における力のつりあいを考える。

力のつりあい (4.1)

というベクトル方程式で表される。

動力学でも運動方程式を形式的に

(4.2)

と表すことができる。

スカラー量で表された方程式を得るため、(4.1)や(4.2)と、任意の仮想的な変位との内積をとる。

(4.3)

(4.4)

例えば

とすれば

という式が出て、運動方程式の x 成分がでる。 y, z 成分も同様に出る。

それ以外の をとってもこれ以上新しい独立な式は出ない。

この限りでは、 を任意の微小変位とした際、(4.1)と(4.3)、(4.2)と(4.4)はそ

れぞれ等価である。

(4.3)を仮想仕事の原理または仮想変位の原理※ (4.4)をダランベールの原理※
という。

※) 原理という名称は不適切であり、ニュートンの運動の法則の方がより基礎的である。

とくに運動の向きが拘束されているような場合は、その方向の仮想変位だけ考えれば、先ほどの垂直抗力のような拘束力が出てこないのに、便利なおことがある。

仮想仕事の原理の適用例

§5 ラグランジアンラグランジアンの導出

ポテンシャルのある保存力の働く場合を考える。運動方程式は

(5.1)

だが、これは運動エネルギー

(5.2) を使って

(5.3)

と書くことができる。ただし、微分記号の下がベクトルになっているのは、

をまとめて書いていることを意味するものとする。

(5.3)より

(5.4) を得る。

つまり

が成り立ち、

さらに保存力なら

なので

(5.5) という ラグランジアンを導入すると、

(5.6) という式は

運動方程式

と等価であることがわかる。

非保存力 も働いている場合は

(5.7) のように表される。

これまでは直交座標を仮定していたが、

(5.8)

という変数変換をして、ラグランジアン L を と の関数と読み替える。

逆解きして

また、ベクトルの記号のままで

とにかくと何が何だかが

わからなくなるので、

成分表示に書き換えて、

として

(5.9)

のように表す。*は全ての添字を網羅したワイルドカードということにしよう。
しばらく式変形をする。

ラグランジアンを一般座標 の関数 として表しても、得られる
運動方程式は

(5.10)

となり、座標の取り方を変えても同じ形をとり、共変な形でかけることがわかる。

(3.3)—(3.5)と比べて見よ。

例 極座標で中心力場中の運動を考えてみる。原点に固定された質点 M がある時のテスト粒子の運動を x y 平面上で考える。

直交座標で書いたラグランジアン L は

(5.11)

ここから運動方程式を出すと、

となり、正しい式が得られる。 y についても同様。

ラグランジアン L を極座標を用いて書くと

(5.12)

となる。(速度の自乗がこのようにかけること)

このラグランジアンから一般座標による運動方程式を処方箋に従って書くと

(5.13)より

(5.14)より

運動方程式での座標変換では、大変苦労して出した式が、いとも簡単に出る。

L は θ には依存しないので(5.14)から

(5.15) の形の式が出て、

保存則があることがわかる。

ラグランジアン L の中に含まれない座標変数のことを、

循環座標 (cyclic coordinate) という。

この変数に対して何らかの保存則が成り立つ。

デカルト座標でかいた質点系の運動エネルギー

質点の個数を N とする

(5.16)

から出発して、一般座標 によって

と書けたとすると、

(5.17)

(5.18)

(5.19)

のように表される。

一般化運動量

(5.21) も

(直交座標の運動量に変換行列をかけることで得られる。)

§6 運動を解くということの別の見方

運動方程式 (6.1)

を質点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ に対する微分方程式だとみなし、この微分方程式を解いて質点の軌道を決定できれば、運動は解けたことになる。初期条件としては、 $t = t_0$ での位置 $\mathbf{r}(t_0)$ と速度 $\mathbf{v}(t_0)$ の2つを与えて解く、という操作。(初期値問題)
初期値問題 = 未来を予言すること。

運動の記述。図示して考える。

という四次元時空での質点の軌跡を考えることもできる。

世界線という

と初速度のいろんな値に対応したいろいろな世界線を引いてみて、ある力の場合（位置の関数としてのポテンシャル）が存在したとして、実際に実現する世界線はどれか？という問いの立て方をしてみる。

上に述べたように、これまで考えてきたような力学の問題では、初期位置 と初期速度 という 6 ケの量を指定して 2 階微分方程式を解いたので、初期位置だけをみて指定したのでは、この問題の解は一通りには決まらない。

そこで始点と終点の座標という 6 ケの量を指定し、その間を結ぶ世界線を決定する、という問題を考える。（もちろん到達不可能な点もある）

Q 到達不可能な点があるような問題を考えよ。

さて、ダランベールの原理
を用いた
運動方程式の表記

(4.4) は一般座標

に対しても、

(6.2) と表すことができる。

(6.2)では、従来の直交座標に基づいた仮想変位 の代わりに

と一般化座標の仮想変位をとっているが、その

各成分を任意に取れば、(6.2)のカギ括弧の中が全て零にならない
ことがわかるので、これは運動方程式と等価であることが納得できる。

(6.2)の左辺はまた、

(6.3)

と表すことができる。

これが各時刻 tで成り立つわけである。

このことから正しい世界線——運動方程式の解になっているような世界線——を
与える処方が得られるのだが、その前に少し数字的準備が必要である。

§ 7 汎関数と変分法

§ 7.1 汎関数

関数 function (機能): 一つあるいは一組の数を与えると、それに対応してある数が決まる。

汎関数 functional: 一つの関数を与えると、それに対応してある数が決まる。

例

(7.1)

という関数を与えた時、 という数がひとつ決まる形になっている。
これを のように[...]で表すことにする。

という連続関数の引数 λ を と離散化して考えると

という途中の点の値全てに は依存する。

したがって、汎関数 は、無限個の変数の関数

であると考えることができる。

において、 λ はどんな文字で表しても意味が変わらないダミー変数である。

(7.1a) と書いても同じ。

と書いても同じ。

よって、 λ のように書くことにしよう。

という式における i や n と同じようなものである。

§ 7.2 変分法

汎関数の極値を与える関数について調べてみる。

(1) まず y のみの汎関数

(7.2) に対して

関数 y を微小関数 η だけずらした時に J がどう変化するかを調べる。

(7.3)

任意の微小関数 η のズレに対して δJ となるのは、 δJ が常に成り立つ場合に限られる。

その答えは、
こない。

(2)次に、
(7.4)の場合は、

(7.5)と書ける。

この式と(6.3)式との類似点に注目すること。

(7.5)はさらっと書いてしまったが、関数の変分と関数の微分の変分の関係を慎重に検討しておこう。

よって

(7.6)

(
という関数の傾きと同じということ)

∴

(7.7)

第二項を部分積分 端点での の値は固定(始点と終点は動かさない)

が任意の に対して成り立つのは、
その区間で (7.8)

が成り立つ場合に限られる。

これをオイラー・ラグランジュ方程式という。

が極値をとるような関数 $x(t)$ は、(7.8) という微分方程式の解を求めれば、得られるということを意味する。

例 最短曲線の問題

2次元ユークリッド空間上の最短曲線の問題を考える。

(7.1a)

t は時間ではなく、軌道の特徴付けるパラメタ
は独立に取れるから、

(7.8)

において $\frac{d}{dt}$ をみたす。

このとき (7.11) となるので

(7.12) つまり 直線 になる。

§ 7.3 汎関数微分

変分をもっと簡単に求めたい。

定義

 汎関数微分

に対して 汎関数微分 とは

(7.12)

のこと。

つまり δ の引数が s という値をとるところだけで δ を δs だけ
ずらして、つまり δ として変分をとる操作のこと。
ここで、 δ は Dirac のデルタ関数である。(電磁気学でやりましたよね?)

に対しては、汎関数微分は

(7.13)

となり $t=s$ のときのオイラー・ラグランジュ方程式がでる。

§ 8 最小作用の原理

§ 8.1 作用汎関数

汎関数 S における δS を、ラグランジアン L を用いて表すと、
(8.1)

ととると

(8.2) の変分

(8.3)という一般化した運動方程式にほかならない。

よって運動方程式の解として与えられる軌道 $x(t)$ は、(8.2)で定義される汎関数が極値をとるような関数であることがわかる。

(8.2)で定義された $S[x]$ を、作用汎関数という。

§ 8.2 最小作用の原理

最小作用の原理

(8.2)

作用汎関数を最小（実際は単に極値）にするような世界線（あるいは軌道）が、実際に起こる運動である。

(8.4)の解

多数の粒子がある場合など、作用汎関数が多数の関数に依存し、ラグランジアンが $L(q, \dot{q}, t)$ と書ける場合も、各座標変数に対して変分を取るので、(8.4)式が N の数だけ成り立つ。

(一般化) 運動量と一般化力

(8.5)

(8.6) と定義すると

一般化された運動方程式つまりオイラー・ラグランジュ方程式は、

(8.7)

という形になり、ニュートンの運動方程式と同じ形になる。

そこで を (一般化) 運動量 を一般化力 と呼ぶ。

§9 オイラー・ラグランジュ方程式の共変性

オイラー・ラグランジュ方程式が点変換に対して共変であることを示す。

(性質のよいどんな座標系で作用汎関数を表しても、同じ形のオイラー・ラグランジュ方程式が得られること。) 極座標については既に確かめてある。

点変換

座標系を表す 2 つの異なる変数の組 $(q, \dot{q})$ が

(9.1) と表され、

さらに (9.2) をみたすとき、すなわち逆変換が存在するとき、
と $(Q, \dot{Q})$ を結ぶ座標変換を 点変換 という。

つまり $(q, \dot{q})$ 系の各座標点と $(Q, \dot{Q})$ 系の座標点が一対一に対応するような変換。

たとえば、 $Q = q^2$ のような依存性がある変換はダメである。

一方、(9.3) と表されるから、

(9.4) のように、座標変数の時間微分の変換は、時間微分にも依存する。

を新しい変数 で表すことは、

(9.5)

と読み替えることである。すなわち、

(9.6) と読み替えられ

る。

註

と は、関数 の のところに

を代入した、という意味ではなく、ラグランジアン L を新しい変数 の関数
と見なして書き直した、という意味である。例えば、直交座標と極座標で書いた
自由粒子のラグランジアンは、それぞれ

と書け、単に変数を書き換えただけではないということに注意する。

(9.6)の変分は、前と同じように、

とかけるが、

(9.7)が成り立ち、また

(9.8) とな

ることは(7.6)と同様に示せるので、

(9.9)

これより、 δq_j で $j = k$ のみをゼロでない任意の値に取った変分に対し

(9.10)

(9.10)は

という δq_j という形の行列 $\times$ ベクトルの形に書ける。

k_i 成分が δq_j であるような行列

(9.12) が得られる。

つまり、オイラー・ラグランジュ方程式は座標変数の取り方に対して共変な形をしている。

座標変換によって運動方程式の具体的な形は変わる。

したがって、不変ではない。しかし、(8.4)や(9.12)のように、各座標によって与

えられたラグランジアン L から導かれる運動方程式は、(抽象的に) 同じ形式で表すことができる、ということ。

Q 逆変換を導くこと

§ 10 拘束条件の下での運動

§ 10.1 拘束条件

第1回目にやった斜面上を滑る箱の運動は、本質的には一次元運動であるが、これを直交座標 (x, y) で運動方程式を書くと、それを解く際、 (x, y) が斜面上の点である、という拘束条件を満たして解かないといけない。

または、
$$(10.1) \text{ とか。}$$

拘束条件が満たされるように働く力が、垂直抗力 N であった。

(はじめから斜面方向の一次元問題として解けば、それと垂直な N は現れない。)

(10.1) のような 拘束条件がある場合の解析力学 を考える。

拘束条件は一般に

$$(10.2)$$

のように表すことができる。拘束条件が複数ある時は(10.2) のような条件式の数が増える。

変分を取る時、各 q_i の微小変位 δq_i を取った後も、拘束条件(10.2) が満たされていないといけない。すなわち、

$$(10.3)$$

つまり、

すなわち、各 $\mathbf{a}_i$ は互いに完全に独立に取ることは許されず、

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (10.4)$$

という線形の関係式が常に満たされていなければならない。
 当然のことながら、(10.2)のような条件が入ると、独立変数が一つ減る。

(7.7)と同様に

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (10.5)$$

(10.5)は2つの「ベクトル」 $\mathbf{a}_i$ と $\mathbf{a}_j$ の内積の時間積分という形をしている。

の各成分が各時刻において全く任意の値を取って良いのであれば、これまでやったように

(10.6)
 しか許されない。

しかし、今は拘束条件 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ によって $\mathbf{a}_i$ は(10.4)で示したように
 空間での $\mathbf{f}$ のグラジエント $\nabla \mathbf{f}$ と直交する、という制限のもとでの
 変分ベクトルである。

ということは、 $\mathbf{a}_i$ も $\mathbf{a}_j$ となる必要はなく、 $\nabla \mathbf{f}$ でありさえすれば(10.5)が成り立つことがわかる。

逆に、(10.5)が(10.4)を満たす全ての変分 δx に対して成り立つためには、
 δx となる必要があることも図形的・幾何学的に理解することができる。
 ($\delta x = 0$ となる場合も $\delta x = 0$ に含まれるとする。)

すなわち、 λ を t の任意の関数として、

$$(10.7)$$

となることが、拘束条件の下での変分から導かれる運動方程式である。

§ 10.2 ラグランジュの未定乗数法

このことから、拘束条件を満たすような変分とそれに応じた運動方程式を与える処方箋として、以下のような方法が得られる。

ラグランジュの未定乗数法

もとのラグランジアン $L(x, \dot{x}, t)$ に対して、
 拘束条件 $\phi(x, \dot{x}, t) = 0$ を与える関数 f を未定乗数 $\lambda(t)$ 倍した関数を引いて、

$$\tilde{L}(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) - \lambda(t) \phi(x, \dot{x}, t) \quad (10.8)$$
 を定義し、
 $\lambda(t)$ についても、 $\delta \lambda$ と同じように変分を取る。

$$(10.9)$$

そして各 x と λ は独立な変分だと思って、それぞれに対してオイラー・ラグランジュ方程式をたてると、

つまり、(10.10)

ならびに、 λ について(10.11)

という拘束条件が出る。

処方箋 λ という $n+1$ の変数に対して、(10.6)
 (10.7)という $n+1$ 個の式が得られている。まず、(10.6)の各式を解いて $\mathbf{r}$ を
 λ の関数として求める。その結果を(10.7)に代入し、(10.2a)

を解くことによって λ を決定すれば、拘束条件の下での運動が解けたことになる。

例 いつもの斜面の例

(10.14)を初期位置原点、初速度 0 として解くと

(10.2b)に代入すると λ が決まる。

(10.14)は
となり、正しい運動方程式になっていることが確かめられる。

このように $\lambda(t)$ というように時間の関数と書いていたが、 λ の時間微分を含む方程式は出てこないで、 λ については代数方程式を解けば良い。

§ 10.3 多数の拘束があるとき

拘束条件が多数 (10.15) あるときは

(10.16)

として、変分 と をとり、

(10.17)

という n 個の式から という解を求め

(10.18) という n 個の式に

という解を代入して を決める

と、拘束条件を満たす変分方程式の解が得られる。

§ 11 対称性と保存則

ニュートン力学では、運動量保存則は作用・反作用の法則から導かれたが、より基礎的な観点に立つと、運動量保存則は空間の並進対称性に起因することを示すことができる。

§ 11.1 運動の積分

ある座標変数 q において、ラグランジアン L が q に依存しない場合、 q に対する運動方程式は

$$(11.1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{となるので}$$

(11.2) $\int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt$ という 運動の積分 あるいは 運動の定数 が存在し、それに対する保存則が成り立つ。

§ 11.2 運動量保存則

これを少し発展させて、空間の並進対称性がある場合、すなわち空間が一様で非自明な場の配位がない場合に拡張する。

並進対称性 デカルト座標 $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} + \mathbf{a}$ というように定ベクトル移動しても、系が同じ形の物理法則に従う場合、つまりラグランジアンがこの変換に対して不変である場合、並進対称性が成り立っているという。

たとえば、 N 個の質点からなる系の場合、各質点の座標 $\mathbf{r}_i$ と $\mathbf{p}_i$ を力学変数と見なすことができるが、空間の並進対称性がある場合、ラグランジアンは $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$ という変換に対して不変である。
を微小量だとすると、

$$(11.3) \quad \delta L = 0$$

が任意の微小変位 に対して成り立つ。

運動方程式

を用いると、(11.3)は

(11.4)

と書き直すことができ、全運動量の保存則

(11.5)

がでてくる。

参考 初期の地動説では、宇宙は太陽系と恒星天に別れていた。太陽が宇宙の中心であり、その中心力場の中を地球などの惑星が運動することになっていた。従って、太陽が原点であり、その意味では空間の並進対称性はない。しかし、太陽も他の惑星と同様、質点としてニュートン重力のもとで運動すると考えれば、

(11.6)

というようにポテンシャルは座標の差だけで欠けるので、空間の並進対称性が成り立つ。(太陽も動かすような高いエネルギースケールまで考え合わせて対称性が回復した！？)

§ 11.3 エネルギー保存則

時間方向の並進対称性からはエネルギー保存則が出てくる。

としても、系の物理的振る舞いが変わらないこと。すなわち、時間の原点をどこにとっても良いこと。

ラグランジアンが t に顕わに(陽に)依存しないこと。

(11.7)

が成り立つ。ただし、ここではデカルト座標に限らず一般座標 を考えている。そこで、

(11.8)

という量を定義すると、

(11.9) となることがわかる。

H を ハミルトニアン という。

一般座標によって、(5.18)のようにラグランジアンが

(11.10) と書けると

一般化運動量は

(5.21) なので、

ハミルトニアンは、

(11.11)

となり、力学的エネルギーの総和を与えることがわかる。

というわけで、時間の一様性から出てくる H の保存則は、エネルギー保存則にほかならないことがわかる。

量子力学に入ると、空間座標と運動量、時間とエネルギーのこうした関係がさらに展開されていくことに注目しよう。

§ 11.4 空間の等方性と角運動量保存則

空間の等方性＝回転対称性

任意に選んだ軸の周りに系を角度 θ だけ回してみる。

その軸を向いて大きさ r のベクトルを $\mathbf{r}$ とかく。

この回転変換によって各座標は

(11.12)

だけ変化し、速度ベクトルも

(11.13) と変化する。

座標の変換則を時間微分すれば良いから。

この回転によるラグランジアンの変化は

(11.14)

と書けるが、これは回転対称な系では零なので、

(11.15) で定義される全角運動量は保存する。

等方空間→角運動量保存則が成り立つ。

(11.16)

§ 11.5 ネーターの定理

ラグランジアン がある変換

(11.17)

に対して不変だとする。すなわち、

が成り立つ場合。

(註 共変なのではなく、本当に不変な場合を考えている。)

このとき、

が成り立つので、保存量

があることがわかる。このこと、すなわちラグランジアンの不変性に付随して保存量があることをネーターの定理という。

第Ⅱ部 ハミルトン形式

§ 12 ハミルトンの正準方程式

ラグランジアンは $L(q, \dot{q}, t)$ の関数だったが、
(11.8) によって定義したハミルトニアンは

$H(q, p, t)$ を用いて H の関数であると見なす。
を p に 共役な運動量(conjugate momentum) という。

ハミルトニアンの全微分を作ると、

$$(12.1)$$

一方

と(11.8)より

(12.2) とも書ける。

(12.1)と(12.2)を比べて、

(12.3)

(12.4)

これがラグランジュの運動方程式に替わるハミルトンの正準方程式である。

数学的には、 q 変数の時間二階微分方程式を p と q の一階微分方程式二つに読み替えたことに相当する。

例 1次元単振動 質量 m 各振動数 ω

§ 13 ルジャンドル変換

ラグランジアン からハミルトニアン に行くような変換
はルジャンドル変換になっている。

熱力学でさんざんやったはずであるが。

まずはルジャンドル変換をきちんと定義するため、2 変数 x, z の関数
の全微分

(13.1)

を、 (x, z) ではなく (u, z) で 同じだけの情報を表すことを考える。

を用いて、2 変数関数

(13.2)

を定義する。但し最右辺の x は を逆に解くことにより、 のよう
に u と z の関数で書けているものとする。

個の関数の全微分は

(13.3) と書けるので、

g は u と z を独立変数とする関数になっているように見える。

x と は によって復元できる。

以上のように は と同等の情報をもっている。

を $\mathcal{C}$ の x に関するルジャンドル変換という。

が x について逆解きできることが前提になっている。

その幾何学的意味を考えるため、変数 z は取りやめにして、
「関数 $f(x)$ が与えられた時に、 $\mathcal{C}$ を独立変数として $f(x)$ と同等の情報をもつ関数 $g(u)$ を構築する」という問題を考えてみる。

関数 $f(x)$ は x y 平面上の一曲線を与える。
その曲線上の点の集合といってもよい。

別の見方として、それを各点での接線の集合、
つまり $\mathcal{C}$ を包絡線とするような直線の集合
を表すと考えても良い。

(直線も傾きと切片という 2 変数で表されるから。)

曲線 $\mathcal{C}$ 上の点 (x, y) における
接線の方程式は、一般に

$$(13.4)$$

と書けるが、点 (x, y) がこの接線上にあることから、

が成り立つ。

これが各点で成り立つので、 $\mathcal{C}$ を改めて $\mathcal{C}^*$ と書くと
(13.5)

となるが、 $\mathcal{C}^*$ を逆解きして $\mathcal{C}$ とみなして

(13.6)

のように g を u の関数と考える。

これができるためには、 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{H}$ が $\mathcal{U}$ の一価関数でなければならない。
右図の場合、 $\mathcal{U}$ を与えただけでは g が一意的に定まらない。

(13.7)

のいずれかが成り立つことが必要である。

つまり、 $\mathcal{L}$ が $\mathcal{U}$ の単調関数であることを条件として要求しているのである。

多変数の場合

ラグランジアン

からハミルトニアン

へのルジャンドル変換が可能なのは、 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ の関数として、

と一意的に書ける場合であるが、これが可能であるための条件は全ての点で

(13.8) が成り立つことである。

(お気軽な)証明

$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ であるが、 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ でも $\mathcal{H}$ においても共通なので、定数のパラメータとして扱い、しばらくその存在をわすれ、 $\mathcal{H}$ という変換が一対一に成立する条件が(13.8)式で良いことを示す。この式は、

(13.9) といっているのと同じである。

ある基準点

において、

(13.10)と決まっていたとする。

このとき、

という任意の微小変位に対して、

(13.11)

と書けるが、

(13.12) が逆転できるためには

という点で(13.9)すなわち

が成り立つ

ことが必要十分である。

こうして微小変位をくり返すことにより、

の一対一対応が

常に成り立つ条件が(13.8)であることが理解できる。

§ 14 変分法によるハミルトンの正準方程式の導出

ハミルトニアン H は一般化座標 q と p によって

その共役(共軛)運動量 p の関数であるが、この

座標と運動量で張られる空間(数学的な意味での)を「位相空間」(phase space)という。

作用汎関数

を S と H で書くことを考える。

(14.1) を作用に入れて変分すると、

(14.2)

と を任意とすると、それらの係数 = 0 から、
ハミルトンの正準方程式

(14.3) が出てくる。

註 で書いた作用を変分する時には、 と について変分し、
という関係を使って部分積分することにより、二階微分方程式を
一つ得た。つまり、 による変分と による変分をあわせて、一つの二階
微分方程式として表したのである。

ハミルトン形式では による変化と による変化をそのまま残し、2
つの一階微分方程式として表しているのである。各時刻においては、 と
は別の自由度を表していることに注意せよ。

§ 15 正準変換

§ 15.1 一般の正準変換

§ 9 でオイラー・ラグランジュ方程式が座標変数の取り方に寄らず、共変な形で表せることをみた。正確に言うと、

は点変換

に対して共変なのであった。

ここでは、ハミルトンの正準方程式に対して、もっと広いクラスの変換
すなわち だけでなく、 も独立変数とし、両者も混ざり合うような変換

(15.1)

を考える。

この新しい変数 Q で表した運動方程式が何らかの新しい
ハミルトニアン関数 $H(Q, P, t)$ によって
によって

(15.2)

と書けるために、変換(15.1)が満たすべき条件を考えてみる。

変分法による正準方程式の導出を思い出すと、

(15.4) δW がいずれの変数に対しても成り立たないといけない。

それが実現するのは、被積分関数が全微分 dW で書け、端点にしかよらない
場合である。

すなわち、

(15.5)

となればよい。なぜなら、

において、端点の値は変分をする時固定されているので寄与しないから。

W は形式的には、 $\sum_{i=1}^{4n+1} \epsilon_i$ という $4n+1$ 個の変数の関数だが、 ϵ_i は $\epsilon_i = \epsilon_i(T, p, \mu)$ の関数として既に表されているので、W は結局 $2n+1$ 個の変数に依存した関数である。(独立変数は別の組み合わせを取っても良い。)

(15.5)より

$$W = \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i \quad (15.6)$$

と書けるので、

$$W = \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i(T, p, \mu) \quad (15.7)$$

と書ける。ここでは W が T, p, μ と t の関数であると見なしたことになる。

$$W = W(T, p, \mu, t) \quad (15.8)$$

この W を与えると、(15.7)が古い変数 ϵ_i と新しい変数 T, p, μ, t の関係を与え、さらに ϵ_i も与える。

W は正準変数を作り出す関数なので、変換の母関数あるいは生成関数 (Generating function)という。

(15.7)より

$$W = \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i(T, p, \mu, t) \quad (15.9) \text{ が成り立つ。 (あとで使う)}$$

熱力学において独立変数をいろいろ取り替えるために、F に pV を足してギブスエネルギーGを導入したように、たとえば

$$G = W + pV \quad (15.10) \text{ に対して}$$

$$G = G(T, p, \mu, t) \quad (15.11) \text{ となることから}$$

W' は の関数であり、

(15.12)

のように求められる。これより、 (15.13) がいえる。

母関数が t によらない場合は、 $H'=H$ であり、 H' は を
によって で表すことによって構成される。

(15.14) とすると、

(15.15) となり

W'' は の関数で

(15.16)

これより

(15.17)

さらに、 (15.18) とすると

(15.19)

(15.20)

(15.21)

正準変換の例をいくつか挙げておこう。

例 1 点変換

(15.22) とすると

(15.12) より

(15.23)

(15.24)

となり、これは点変換を与える。とくに

とすると、

となり、(15.23) より、

もいえるので、これは 変換。

例 2 座標と運動量の入れ替え

(15.25) とすると

(15.26)

がなりたつ。

このようにハミルトン形式では座標と運動量という名前は実質的な意味を持たず、互いに共役な関係にある 2 つの変数、ということだけしかない。

§ 15.2 無限小正準変換

(15.22)において、

とした母関数

は恒等変換

を与えることを見た。これに微小量を加え、

(15.27)

としてみる。 ε は微小量であり、その最低次までしか考えないことにする。

(15.28)

(15.29) となる。

(15.28)は

(15.30) と読み替えることもできる。

ここで、 S はもともとは $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ の関数と考えたが、 $\mathbf{r}$ であり、 $\mathbf{p}$ にはすでに ε がかかっているので、この中では $\mathbf{p}$ と同一視してよいし、また最低次で考えるという観点からはそうすべきである。

というわけで、(15.30)と(15.31)を合わせて $\mathbf{r}$ から $\mathbf{p}$ への無限小正準変換が(15.27)によって定義できることがわかる。

例3 というわけで、 S は ε の最低次では $\mathbf{p}$ の関数と見なすことができるので、 $\mathbf{r}$ とすると、(15.30)より、 $\mathbf{p}$ (15.31)より、 $\mathbf{r}$ (15.32) が得られ、 $\mathbf{p}$ を $\mathbf{r}$ だけずらす変換が与えられる。つまり、 $\mathbf{p}$ と取った変換、すなわち運動量を母関数とする無限小正準変換は、空間座標 $\mathbf{r}$ の無限小並進変換を生成することがわかった。

「運動量は座標の並進変換の生成子である」

例4 ハミルトニアンを生成子とする無限小正準変換を考えてみる。すなわち、ハミルトニアン H を各 $\mathbf{r}$ に入れて、(15.30), (15.31)を求めてみる。

(15.33)

より、

(15.34)

となり、ハミルトニアンは時間発展を生成する無限小正準変換を与える。

「ハミルトニアンは時間の並進変換の生成子である」

§ 16 ポアソン(Poisson)の括弧式

§ 16.1 時間微分とポアソン括弧式

と q と t の関数である力学変数 F の時間微分は

(16.1) とかける。

この第二項を簡便に表す表式として、ポアソンの括弧式

(16.2)

を導入すると

(16.3) とかける。

F として正準変数 q, p を考えると、

(16.4)

(16.5) と書ける。

F が t を顯わに含まない場合は、

なので、

(16.6)

ポアソン括弧式が 0 になるような量は保存量である。

とくに、

(16.7) である。

§ 16.2

ポアソン括弧式の諸性質

反対称性

(16.8)

(16.9)

線形性

(16.10) a,b は定数

分配則

(16.11)

微分

(16.12)

とした場合を考えると、

(16.13)

(16.14)

とくに、

(16.15)

(16.16)

これらは量子力学に移行する時に重要である。

(16.17)

直接確かめても良いが、 $\{f, g\}$ が関数 f 、 g の 1 階微分に関する双一次同次式であることに注目する。すなわち、

そして、 $\{f, g\}$ は f と g の 2 階微分についての 1 次の同次式である。ヤコビ恒等式の左辺全体も f 、 g 、 h の 2 階導関数についての 1 次の同次式。そこで、 f の 2 階微分の項だけをまとめてみよう。

初項 $\{f, f\}$ は f については 1 階微分しか含まないので、第 2, 3 項から

ここで、

(16.18)

という表記法を導入すると、ポアソン括弧 $\{f, g\}$ は f に対して線形微分演算子

(16.19)

を作用するのと同じことである。

同様に、 $\{f, g\}$ とかけ、

(16.20)

という表現が得られる。

一般に、任意の線形微分演算子 L は

(16.21)

のようにかける。ここで、 L は

の任意関数である。

より、積の差は

(16.22)

という 1 階微分だけを含む演算子になる。

よって、 $\{f, g\}$ は f についての 2 階微分を含まない。

つまり、ヤコビ恒等式の左辺を計算したとき、 f の 2 階微分の係数はゼロになる。

同様に g や h の 2 階微分の係数もゼロである。しかし、左辺は 2 階微分だけでかける式だったから、これは左辺が恒等的にゼロであることを示している。よってヤコビ恒等式が成り立つことが示された。

§ 16.4 運動の積分とポアソン括弧

(16.23) となるような

時間変化しない保存量を運動の積分という。

f と g が運動の積分ならば、 $\{f, g\}$ も運動の積分である。

(16.24)

しかし、こうしてどんどん新しい保存量が作れるというわけではない。

§ 16.5 ポアソン括弧式の正準変換に対する不変性

(16.2) において

これを という正準変換後の変数で表したらどうなるか。

(16.2)を と書くことにして、 を調べる。

まず、

(16.25) であるが

正準変換同士の関係式

(15.13) (15.9) より

(16.26)

は

(15.21) (15.17) を使って

(16.27)

(15.13) (15.9)を再度用いて

(16.28)

以上より、 Q, P という正準変数で定義したポアソン括弧式においても

(16.29)

(16.30) が

成り立つ。一般の関数

(16.31) については、

などを代入すると

(16.32) となり、

一般の場合もポアソン括弧式は正準変数の取り方によらないことが示された。

§ 17 位相空間と Liouville の定理

力学現象の幾何学的解釈のために位相空間という概念が用いられる。これは、今考えている力学系が n 個の一般座標とそれに共役な運動量の $2n$ 次元の空間のことである。

この空間の各点は、この力学系の運動のある一つの状態に対応する。時間がたつにつれて、この状態を表現する点は位相空間中に線を描いていくことになる。これを位相空間中の軌跡と呼ぶ。

(17.1)

は位相空間中の体積要素とみなせるが、この量は正準変換

→

に対して不変であることが示せる。

(17.2)

であるが、途中 () → () のみをした変換を経由すると、

(17.3) である。

逆行列の行列式はもとの行列の行列式の逆数だから

(17.4) とかける。

分子は を成分とする行列式、 分母は を成分とする行列式

(15.3) より、 が成り立つので、分母と分子の行列はお互いに
転置行列になっていることがわかる。 より、分母=分子であり、

(17.5) であることがいえる。

時間発展も正準変換で表されるので、位相空間の体積は時間不変である。
これを Liouville (リユービル) の定理 という。

§ 18 終点座標の関数としての作用とハミルトン・ヤコビ方程式

これまで作用関数は、始点 と終点 を指定して、それを結ぶ軌跡に
添った積分

(18.1)

として定義され、 と を固定してその 2 点を結ぶさまざまな経路について
線積分した結果を比べ、その値が停留点をとるような軌跡が、実際に実現する運
動だった。以上がこれまでの作用関数の使い方だった。

ここでは別の使い道を考える。上の変分手続き、つまり

(18.2) を解いて

運動は決まっているとする。その解 を S に代入して積分してみる。

解 は での と を与えれば決まる。

を変えればでの到達点 もさまざまな値を取る。

したがって作用 S を での位置 と での位置 の
関数とみなせる。

(18.3)

いま $t = t_0$ を固定し、 t_0 を微小変化させたときの δS を考える。
この途中の t も t_0 と変化を受ける。

(18.4)

ここで p_i は、各時刻での運動量

つまり p_i (18.5) であり、各 i に対して

(18.6) となる。

これは (15.7) と見比べると。正準変数 q_i から p_i への変換とみなせることがわかる。つまり作用 S が母関数の -1 倍になっている。この正準変換は、
 q_i から p_i への時間推進の変換である。

今度は始点の値 $q_1, \dots, q_n$ を固定し、 S を $q_1, \dots, q_n$ の関数とみなす。
、 $p_1, \dots, p_n$ とかきなおすと、

よって (18.7)

これらはまとめて (18.8)ともかける。

(t と が独立変数であることをみてとれる)

(18.7) をあらためて書くと (18.7')

これをハミルトン・ヤコビ方程式という。

1 階偏微分方程式だが、一般解は重要でなく、独立変数の数と同じ数の任意定数を含む完全解が重要である。(運動の初期条件を決めることに相当)

独立変数は と t なので、 $n+1$ 個である。

解 S の任意定数の 1 つは加法的に含まれる。← だから。

(18.9)

も任意定数

ハミルトン・ヤコビ方程式の完全解と運動方程式の解の関数を考える。

を母関数とする正準変換を考える。

(18.10)

新しい変数 の従う正準方程式は

(18.11)

となり、この変換は座標も運動量も定数にうつすような正準変換である。

(18.12) は n 個の座標 を t と $2n$ 個の定数

で表し得ることを示す。

処方箋としては、

1. ハミルトン・ヤコビ方程式 (18.8') の完全解を求める
2. その任意定数の α_i について微分したものを、新しい定数 Q_i とおき、 n 個の代数方程式 (18.13) の組を解いて、 Q_i を t との組で表す。
3. Q_i は (18.14) で与えられる。

完全解が求められなくても問題は簡単化できる。

練習

質量 m の自由粒子の運動を、ハミルトン・ヤコビ方程式を解くことにより求めてみよ。

とおいて解くと良い。

や α_i に対応する量がどのように導入されるか考えながら解いてみてください。

§ 19 電磁場中の荷電粒子の運動

非保存力 のある場合

(19.1) とかけたが、

もし力 があるポテンシャル によって

(19.2) とかけたなら、

によって新しいラグランジアンを代入すると

(19.3) となって

に対するオイラー・ラグランジュ方程式が正しい運動方程式を与える。

電磁場中で運動する荷電粒子がこのようなラグランジアンに従うことをこれから示したい。 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 直交座標として、

(19.4) という力を受ける。

電磁場は (19.5) で与えられる。

(この表式はヘビサイド単位 cgs ガウス単位でも同じであるから、その異同はここでは問わない。)

(19.6)

であるが (位置と速度は独立) なので

つまり (19.7)

よって、 (19.8)

ここで

という時間に関する全微分 (ラグランジュ的な微分) を表している。

そこで (19.9) とすると、

(19.10) となるので、

(19.11) とすれば、

電磁場中の荷電粒子の運動を表すラグランジアンが得られる。

というわけで、荷電粒子の従うラグランジアンを改めて とかくと、

(19.12) となることが

わかる。

ほかに力が働く場合はこのポテンシャルもある。

次にこれをハミルトン形式にしてみる。まず運動量は

(19.13) となり、

ベクトルポテンシャルに比例するシフトを受ける。

(19.14) となる。

§ 20 断熱不変量

単ふりこの紐の長さをゆっくりと（これを断熱的にという）変化させるような状況で、このような変化にも拘らず不変に保たれるような量を見つけてみたい。

一般的な状況設定としては、パラメタ ω によって特徴づけられる一次元の有界な運動（周期的な運動とか）をしている系で、外的要因によってパラメタ ω がゆっくりと（断熱的に）変化する場合で考える。

→何に比べてか言わないといけない

(20.1)

が一定なら、系は閉じており（孤立系としてふるまうということ）、エネルギーは保存する。 ω が変化するとハミルトニアン H より

(20.2)

速く変化する。

周期平均をとる。

(20.3)

をつかって

(20.4)

(20.5)

また、

(20.6)

(20.7) ということ。

一周期の間では ω の変化は小さく、その間運動はエネルギーを保存するとみなせるので、

(20.8)

運動量 p は、変化する座標

と2つのパラメタ

の関数として

と表せる。

(20.8) を で微分すると、
つまり

(20.9)

また で微分すると

も成り立つので、

(20.10)

つまり (20.11)

これは (20.12) とおくと
に相当する。I は E と λ の関数

(20.13) は断熱不変量である。

(20.14) と面積でも表せる。

§ 21 なぜ自然法則は時間 2 階微分方程式であわらされるのか

のとき、(21.1)

という運動方程式を得た。も の関数だから (21.1) は、

のみに依存した 2 階微分方程式である。

ではラグランジアンが という依存性をもつ場合はどうだろうか？

という新しい変数を導入すると、これは

(21.2) という拘束条件を課すのと同じなので、

ラグランジュの未定乗数法により

(21.3)

と、形式的に 1 階微分までしか含まない、これまで扱ったラグランジアンの形に書き換えられる。

に共役な運動量(21.4)

に $\mathcal{H}$ (21.5)

オイラー・ラグランジュ方程式は

(21.6)

(21.7)

(21.7) を t 微分して(21.6)を使い、でかくと

(21.7)

という運動方程式が出る。(最初から $L(\dots, \dot{\dots}, t)$ を変分したほうがはやい)

ハミルトニアンを作ってみる。

$$(21.8)$$

については (21.5) などを用いて通常通り π など表すが、 λ についてはその由来が λ (未定常数) であることから明らかなように、 H に線形で入ってくる。下に有界でなく p の値によっては H はいくらでも量の大きな値をとれ、系は不安定になってしまう。

例

$$(21.9)$$

という調和振動子に 2 階微分の項を加えたラグランジアンを考えてみる。

(21.7) は

$$(21.10)$$

この解は

$$(21.11)$$

$$(21.12)$$

係数 a, b は、初期値 $x(0), \dot{x}(0)$ を使って

$$(21.13)$$

と求められる。

(21.9) を (21.3) に代入し、(21.4) とよみかえると、

$$(21.4) \text{ はそのまま、} (21.5) \text{ は} \dots \quad (21.14)$$

(21.7)より

(21.15)

(21.12)は とすると
からでる。

(21.8)より

(21.16)

となり+モードは正のエネルギーを持っているが
-モードは負のエネルギーを持つ。

(-モードは $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で悪い振る舞いをする解であることに注意。)

オストログラドスキーの定理：

でない限り高階微分理論は不安定性をもつ。

§ 22 大団円 なぜ古典力学は最小作用の原理に従うのか。

ミクロな世界では古典力学は成り立たない。—量子力学 (1925～)

逆に我々の日常生活を記述する古典力学は量子力学のある極限として成立する。
量子力学の著しい特徴は電子など、これまで粒子と思っていたものが波としての
性質——波動性——をもつことである。

逆に波と思っていた光も光子という粒子の性質をもつ（光量子仮説）

質点はその点にしかないので、位置と速度を任意の精度で指定することができる。

一方波を検知すること

波には波長があるので、ある瞬間の観測では

1 波長分の長さ $\Delta x \sim$

をみなければそこに波があるといえない。

逆に 1 点 x でしか観測できなかつたら、1 波長分通るまで、 Δt 時間観測しつづけないといけない。

というわけで、波が表す粒子の位置と速度を同時に任意の精度で測定することはできない。 不確定性

ハイゼンベルクの不確定性原理

(22.1)

古典力学では初期の x と p を決めたら、その後の進化は決定論的だった。

そもそもそれがてきないということは、系の進化は確率論的にしか与えられないということ。

これを求めるのが古典力学の仕事

局在した状態（束縛状態）は定在波として定常状態になるために量子化される。
（とびとびの値しかもたない）。

は複素数で、位相が干渉する。

a から b へ電子が届く確率振幅

(22.3)

※a から b に至る全ての経路

(22.4)

というのが量子力学の処方箋である。（なぜこうなるか、とは問えないが § 18 で
やったように、S が時間推進の正準変換の母関数であることは示唆的である。）
※の和のとり方は、経路積分という手法によって与えられる。

S は $p \times q$ という次元をもつが、この積が (22.1) よりずっと大きいマクロなスケールでは S が少し変化しただけで (22.3) の位相は激しく振動し、確率振幅に対する寄与は打ち消しあってゼロになる。

となりあった経路の寄与が打ち消し合わないのは、 S が停留となるとき、すなわち経路をずらしても $=0$ となるときである。

これは変分法でオイラー・ラグランジュ方程式を求める操作に他ならない。こうして変分原理による運動方程式の導出が正当化される。