解答例

第１問

(1) 直線上の点 $\mathbf{r}'$ が任意の点 $\mathbf{r}$ に作る磁場を積分することにより、点 $\mathbf{r}$ における磁場は次のようになる（ビオ・サバールの法則）。

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{r}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

円筒座標系を考えると、磁場の φ 方向のみがゼロでない。磁場の向きは電流の方向に右ねじを回す方向になる。その成分の大きさは、

$$H_\varphi = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'\left(\dfrac{\rho}{\sin\theta}\right)\sin\theta}{\left(\dfrac{\rho}{\sin\theta}\right)^3} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3\theta}{\rho}dz'$$

となる。

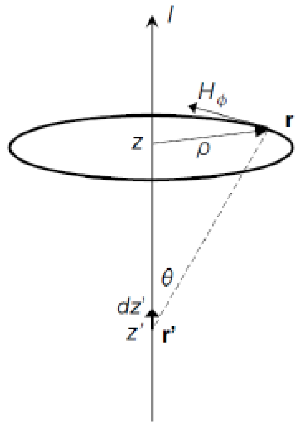
$$z - z' = \rho\cot\theta$$

$$dz' = \frac{\rho}{\sin^2\theta}d\theta$$

に注意して変数変換すると、

$$H_\varphi = \frac{I}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\rho}d\theta = \frac{I}{2\pi\rho}$$

を得る。



（別解）

アンペールの法則を適用する。半径 ρ の円を閉曲線と考えると、

$$\int_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = I$$

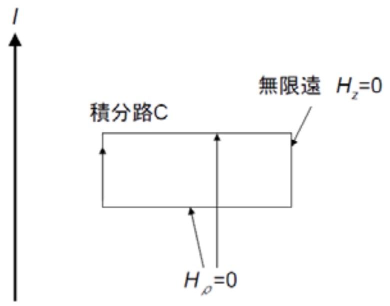
より、

$$2\pi\rho H_\varphi = I$$

となる。これから、

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

を得る。なお、磁場の ρ 成分、z 成分は次の理由により 0 となる。まず、ρ 成分については、逆向きに流れる同じ大きさの無限長直線電流を重ねて考える。逆向きの電流についても ρ 成分は同じはずなので、この場合 $2H_\rho$ となるはずである。しかし、流れている電流は都合 0 なので、発生する磁場は 0、即ち $H_\rho = 0$ である。一方、z 成分については、電流面内に図のような積分路をとってアンペールの法則を適用する。この場合、$\int_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = 0$ であるが、無限遠では $H_z = 0$、また $H_\rho = 0$ なので、結局任意の位置で $H_z = 0$ となる。



(2) 磁場の向きは右ネジの法則から考えて z 方向となる。まず、正方形の 1 辺からの寄与を考える。計算は(1)と同様だが、1 辺の長さが有限なので、積分範囲は $\frac{1}{4}\pi$ から $\frac{3}{4}\pi$ であり、また、$\rho = a/2$ である。従って、

$$H_z = \frac{I}{4\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin\theta}{(a/2)} d\theta = \frac{2\sqrt{2}I}{4\pi a}$$

４つの辺は等価に寄与するので、正方形ループによる磁場の大きさは、

$$H_z = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi a}$$

(3) 微小ループ内で磁場は均一であるとすると、微小ループを貫く磁束は、時刻 t において

$$\Phi = \mu_0 H_z S \cos\omega t$$

と表される。ここに H_z は上で求めた原点での磁場である。従って起電力は

$$\mathrm{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=\mu_0\omega H_z S\sin\omega t=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I\omega S}{\pi a}\sin\omega t$$

となる。スターと直後に起電力は正であり、z 軸に対して右ネジの方向に電流を流そうとする。従って A 端子が正となるので、上記の式の符号は正しい。

(4) 微小ループが閉回路になると電流が流れ、その電流が磁場と相互作用して $\mathbf{I}\times\mathbf{B}$ の方向に力が働く。スタートしてから $\pi/4$ 程度回ったところで考えると、その力は回転方向と逆向きになる。従って、回転を止める方向に力が働くことになる。これが電磁ブレーキである。

第２問

(1) 原点から $\mathbf{r}$ の位置での静電ポテンシャルは正負 2 つの電荷からの寄与の和になる。正電荷、負電荷からの距離は、それぞれ $\left|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{d}}{2}\right|$、$\left|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{d}}{2}\right|$ で表されるので、静電ポテンシャルは、

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\mathbf{r}-\frac{\mathbf{d}}{2}\right|}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\mathbf{r}+\frac{\mathbf{d}}{2}\right|}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\left(1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^2}\right)-\left(1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{q(\mathbf{r}\cdot\mathbf{d})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\mu}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

となる。

(2) 電気双極子の作る静電ポテンシャルと無限一様電場の静電ポテンシャルの和をとると、

$$\phi=\frac{\mu\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}-E_0 r\cos\theta+C$$

となるここに、$\mu=|\boldsymbol{\mu}|$ である。これを整理すると、

$$\phi=\left(\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 r^2}-E_0 r\right)\cos\theta+C$$

となる。括弧内が 0 であれば θ によらず電位は一定となる。そのような r は、

$$r=\sqrt[3]{\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 E_0}}$$

である。この半径の球面上では等電位となるので、上記の r が a である。

(3) 導体では自由に電子の移動ができるので、導体球の表面は等電位面になる。導体球の半

径が a であれば、電場に対する境界条件はまったく同じになるので、(2)の状態の電場と、無限一様電場中に半径 a の導体球を置いたときの電場は同じになる。（ポアソン方程式の階の唯一性。）言い換えると、導体球による鏡像が電気双極子に対応している。

第３問

(1) (a)はファラデーの法則、(b)はアンペールの法則を変位電流に拡張したもの、(c)はガウスの法則、(d)は磁気単極子が存在しないことを表す。

(2) (a)式の両辺の rot をとると、

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

右辺に（b）式を代入し、左辺をベクトル公式で変形する。

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

ここで $\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$（式(c)）を使うと、波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

を得る。同様に(b)式の rot をとって計算すると

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

を得る。波動方程式の標準形

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

と比べて、いずれも速度 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ で進む波を表す。

(3) z 方向に進む平面波を考える。電場、磁場とも x, y 方向には一定なので、それぞれ、$\mathbf{E}(z,t)$、$\mathbf{H}(z,t)$ と表される。(c)式、(d)式を適用すると x 微分、y 微分は 0 になるので、

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

および

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

を得る。電磁波は空間的に電場、磁場が変動しているので、上の２式は電磁場の進行方向成分（z 成分）が 0 であることを意味する。このことは縦波成分が存在しないことを意味する。よって、平面波の電磁波は横波である。