解答例

第１問
(1) 空洞がある導体に電荷が置かれたときは、導体の外側表面だけに分布する。よって、内側表面の表面電荷密度は 0 である。一方、外側表面には、電荷 q_{B} が r_3 の球面に分布するので、外側表面電荷密度は $\frac{q_{\mathrm{B}}}{4\pi r_3^2}$ である。
(2) 導体内部には電場は存在しない。また導体内空洞には空洞内に電荷が置かれていない限り電場は存在しない。従って、$r \leq r_3$ では $E=0$ となる。一方、$r > r_3$ ではガウスの法則から、

$$4\pi\varepsilon r^2 E = q_B$$

なので、

$$E = \frac{q_B}{4\pi\varepsilon r^2}$$

となる。
(3) 内側表面には q_{A} による静電誘導のため-q_{A} の電荷が誘起される。q_{B} の電荷は内側表面には寄与しないので、内側表面の表面電荷密度は $\frac{-q_{\mathrm{A}}}{4\pi r_2^2}$ となる。一方、外側表面には、q_{B} の電荷に加えて、電荷 q_{A} による静電誘導のため q_{A} の電荷が誘起される。従って、合計で $q_{\mathrm{A}}+q_{\mathrm{B}}$ の電荷が均一に分布することになるから、外側表面の表面電荷密度は $\frac{q_{\mathrm{A}}+q_{\mathrm{B}}}{4\pi r_3^2}$ となる。
(4)r の範囲で分けて考える。

(a)$0 \leq r \leq \mathrm{r}_1$ のときは導体内なので $\mathrm{E}=0$ となる。
(b)$r_1 \leq r \leq r_2$ のときは、ガウスの法則から

$$4\pi\varepsilon r^2 E = q_{\mathrm{A}}$$
$$E = \frac{q_{\mathrm{A}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

と求まる。
(c)$r_2 \leq r_3$ のときは導体内なので $E=0$ となる。
(d)$r_3 < r$ のときは、ガウスの法則から

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E = q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}$$
$$E = \frac{q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

と求まる。

(5) 無限遠から電場を順次積分することによって静電ポテンシャルを求める。無限遠で静電ポテンシャルは 0 とするので次のようになる。

(a)$r_3 < r$ のとき、

$$\phi = -\int_{\infty}^{r} \frac{q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(b)$r_2 < r < r_3$ のときは導体内なので静電ポテンシャルは一定。よって、r_3 における値のままである。

$$\phi = \frac{q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

となる。
(c)$r_1 < r < r_2$ のときは、

$$\phi = \frac{q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}}{4\pi\varepsilon_0 r_3} - \int_{r_2}^{r} \frac{q_{\mathrm{A}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}}{4\pi\varepsilon_0 r_3} - \frac{q_{\mathrm{A}}}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \frac{q_{\mathrm{A}}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

である。

(d)0≤ $r \le r_1$ のときは導体内なので静電ポテンシャルは一定。よって、r_1 における値のままである。

$$\phi = \frac{q_A + q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_3} - \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

(6) 電荷 q_A による静電誘導によって B の内側表面には-q_A の電荷が、外側表面には q_A の電荷が誘起される。導体内では電場は 0 なので、内側の球対称性のずれの影響は外側には及ばない。そのため、外側表面の誘起電荷は q_B とともに均一に分布する。従って、$r > r_3$ における電場に変化はない。

第 2 問

(1) 図 a に示すような誘電体表面を貫く閉曲線を考える。ここに Δl は微小量とする。この閉曲線に沿って電場を積分すると、$\Delta l \to 0$ の極限において、

$$\phi = E_{\|} L - E'_{\|} L$$

となる。ここに $E_{\|}$、$E'_{\|}$ は誘電体表面近傍の真空側および誘電体側の電場の平行成分 (表面に平行な成分) をそれぞれ表す。上式は閉曲線に沿った積分なので 0 になる。よって、$E_{\|} = E'_{\|}$ となり、電場の平行成分は保存することが示される。

(2) 図 b に示すような誘電体表面をまたぐ直砲体を考える。ここに Δl は微小量とする。誘電体表面には真電荷は存在しないので、$\Delta \to 0$ の極限において、ガウスの法則から、

$$D_{\perp} S - D'_{\perp} S = 0$$

を得る。ここに $D_{\perp}$、$D'_{\perp}$ は誘電体表面近傍の真空側および誘電体側の電束密度の垂直成分 (表面に垂直な成分) をそれぞれ表す。よって、$D_{\perp} = D'_{\perp}$ となり、電束密度の垂直成分は保存することが示される。

(3) 誘電体表面近傍の真空側の電場の平行成分、垂直成分を $E_{\|}$、$E_{\perp}$ と表し、誘電体側の電場の平行成分、垂直成分を $E'_{\|}$、$E'_{\perp}$ と表す。このとき、

$$\tan\theta = \frac{E_{\|}}{E_{\perp}}$$

である。(1) の結果から、電場の平行成分は保存するので、$E'_{\|} = E_{\|}$ である。また、(2) の結果から電束密度の垂直成分は保存するので、誘電率を使って、$\varepsilon E'_{\perp} = \varepsilon_0 E_{\perp}$ と書ける。よって、

$$\tan\theta' = \frac{E'_{\|}}{E'_{\perp}} = \frac{\varepsilon E_{\|}}{\varepsilon_0 E_{\perp}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\tan\theta$$

となる。(4) 誘電体に電場がかかると、誘電体が分極する。分極によって生じる電場はもとの電場を打ち消す方向にできるので、誘電体中では真空中よりも電場が小さくなる。