補足１ ポアソン方程式の解の一意性

ポアソン方程式の解の唯一性を示すために、まずグリーンの定理を証明する。今、任意のスカラー関数ψに対してベクトル関数$\mathbf{V}$を次のように定義する。

$$\mathbf{V} = \psi \,\mathrm{grad}\,\psi$$

すると、ガウスの定理（註１）から、

$$\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \mathrm{div}\mathbf{V}dV$$

ここで、

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$= \psi\nabla^2\psi + (\mathrm{grad}\,\psi)^2$$

である。なお、

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。これから、

$$\int_S \psi(\mathrm{grad}\,\psi)_n dS = \int_V \psi\nabla^2\psi dV + \int_V (\mathrm{grad}\,\psi)^2 dV$$

を得る。これがグリーンの定理である。

いま、ポアソン方程式に境界条件を満たす解が２つあったとする。それらをϕ_1、ϕ_2とし、その差をψとする。即ち、

$$\psi = \phi_1 - \phi_2$$

とする。ϕ_1、ϕ_2は境界条件を満たすので、境界面Ｓで$\psi = 0$となる。従って、グリーンの定理の左辺は 0 になる。一方、ϕ_1、ϕ_2はポアソン方程式を満たすので、

$$\nabla^2\psi = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

が成立する。従って、グリーンの定理の右辺第一項は 0 になる。その結果、右辺第二項のみが残るので、

$$(\mathrm{grad}\,\psi)^2 = 0$$

となり、結局、

$$\mathrm{grad}\,\psi = 0$$

を得る。従って、

$$\psi = \mathrm{const}$$

であるが、境界面では 0 であったので$\psi = 0$となり、

$$\phi_1 = \phi_2$$

である。よって、解は一意的に決まる。

（註１）ガウスの定理は次のようにして示される。ガウスの法則とその微分形はそれぞれ

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$

なので、これから、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathrm{div}\mathbf{D} dV$$

を得る。これは任意のベクトル $\mathbf{D}$ について成り立ち、体積積分と表面積分の関係を与えるものである。