宿題と解答（12 月 10 日分）

（問題）

図１のように一直線上に置かれた磁気双極子どうしに働く力を求めよ。ただし、$r >> l$ とする。

（解答）

２つの磁気双極子の磁極間(N,N), (S,S), (N,S), (S,N)に働く力はそれぞれ以下のようになる。

(N,N) 斥力 $$F_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{r^2}$$

(S,S) 斥力 $$F_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{r^2}$$

(N,S) 引力 $$F_3 = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{(r+l)^2}$$

(S,N) 引力 $$F_4 = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{(r-l)^2}$$

F_1 と F_3 の和をとり、(l/r) で展開して $(l/r)^2$ のオーダーまでとると、

$$F_1 + F_3 = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[1-\left(1+\frac{l}{r}\right)^{-2}\right] = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[\frac{2l}{r} - 3\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]$$

となる。ここで、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

を用いた。同様に、

$$F_2 + F_4 = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[1-\left(1-\frac{l}{r}\right)^{-2}\right] = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[-\frac{2l}{r} - 3\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]$$

となるので、力の合計は次のように求められる。

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -\frac{3q_M^2 l^2}{2\pi\mu_0 r^4} = -\frac{3m^2}{2\pi\mu_0 r^4}$$

力は r^{-4} に比例することに注意。

なお、相互作用エネルギーは、２つの磁気双極子を無限遠から r まで運ぶときのエネルギーに等しいので、

$$U = -\int_{\infty}^{r}\left(-\frac{3m^2}{2\pi\mu_0 r^4}\right)dr = -\frac{m_2}{2\pi\mu_0 r^3}$$

となる。

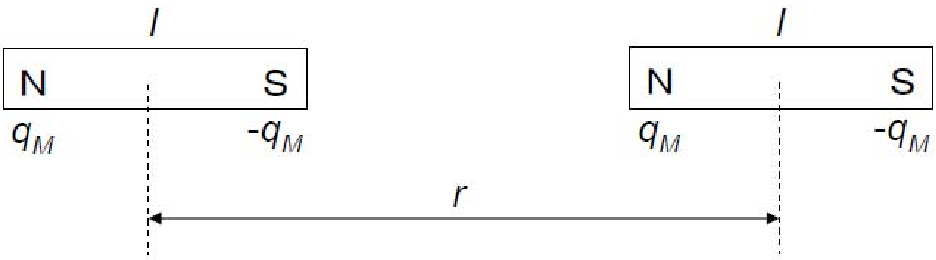

図 1