宿題とその解答（10 月 22 日分）

（問題）

原点に電荷 q を置く。原点以外の点で、$div\,\mathbf{E}=0$ となることを $\mathbf{E}$ の表式を用いて確かめよ。

（解答）

(x,y,z) 点における電場は次のように書ける。（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に注意。）

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

従って、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3y^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3z^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

となる。定義にあてはめて上記の 3 つの和をとると、

$$div\,\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

が確認される。