宿題と解答例（10 月 8 日分）

（問題 1）

ｘｙ平面に無限一様分布した電荷があるとき、ｘｙ平面からｚだけ離れた点の電束密度、電場を求めよ。なお、電荷の平面密度はξとする。

（解答例）

図１のように xy 平面を含む直方体の閉曲面を考える。ｚ方向の長さは$c = 2z$にとる。無限に分布しているので、対称性から電束、電場の向きはｚ軸に平行である。従って、直方体の６つの面のうち、ｘｙ平面に垂直な４つの面を貫く電束は存在しないので、ｘｙ平面に平行な２つの面（S_1 と S_2）を貫く電束のみを考えればよい。電束の大きさについては$D(z) = D(-z)$が成り立つこと、および、電束の向きは S_1 面、S_2 面ともに直方体の内側から外側に向いていることに注意すると、ガウスの法則から、

$$2abD(z) = ab\xi$$

となる。したがって、

$$D(z) = \frac{\xi}{2} \quad \text{および} \quad E(z) = \frac{\xi}{2\varepsilon_0}$$

を得る。これからわかるように、電束密度、電場はzに依存しない。このことは、電束を実際に書いてみると直感的に理解できる（図２）。

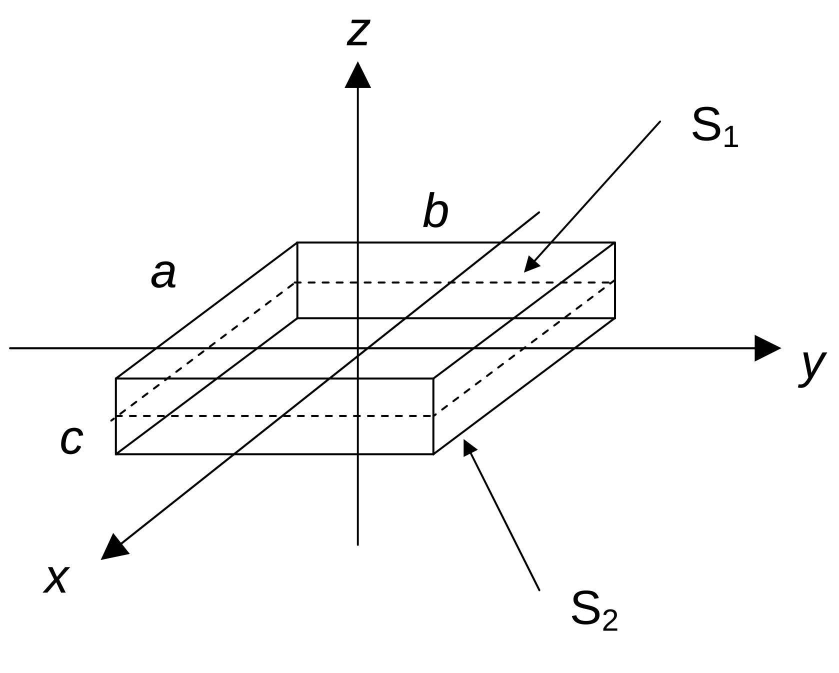

図１

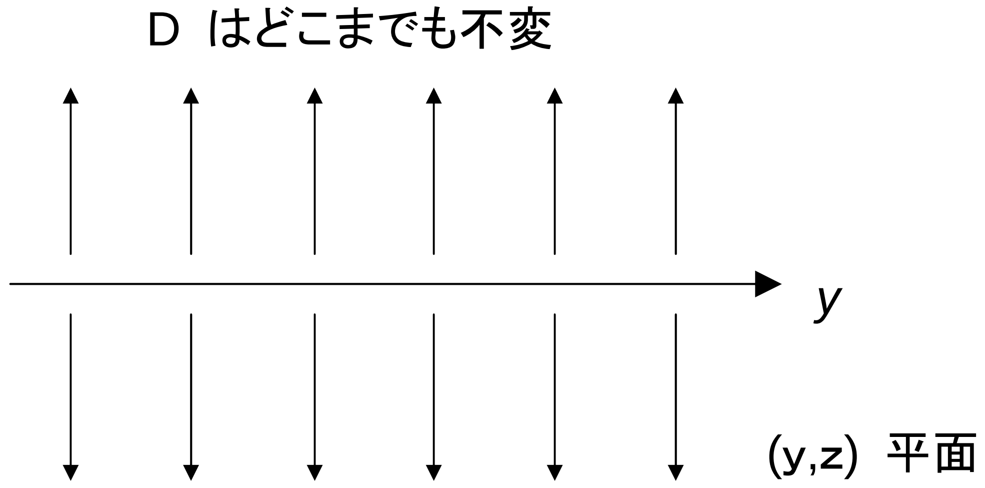

図２

（問題２）

原点に電荷 q を置く。原点以外の点で、$div\mathbf{E}=0$ となることを $\mathbf{E}$ の表式を用いて確かめよ。

（解答）

(x,y,z) 点における電場は次のように書ける。（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に注意。）

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z}{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

従って、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

となる。定義にあてはめて上記の 3 つの和をとると、

$$div\,\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

が確認される。