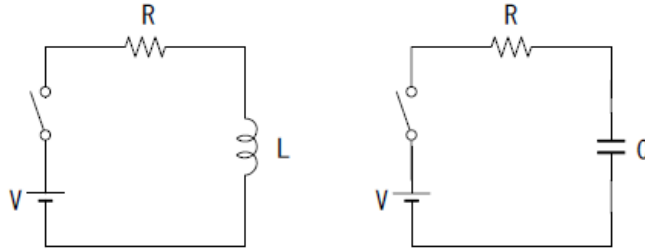


宿題解答 (1月14日分)

問題 図に示す2つの回路について、スイッチをONにしてからの電流の変化を求めよ。



解答例

それぞれの回路について、右回りの方向の電流を $I(t)$ とする。

まず、RL回路 (左) について考える。スイッチをONにした状態で、直流電源電圧 V とコイルによる逆起電力 E の和が抵抗にかかるので、

$$V + E = RI(t) \quad (1)$$

となる。逆起電力は、コイルの自己インダクタンス L を用いて、

$$E = -L \frac{dI(t)}{dt} \quad (2)$$

なので、次のような微分方程式を得る。

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V \quad (3)$$

これを解くために、右辺をゼロにした方程式

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = 0 \quad (4)$$

を解くと、

$$I(t) = A \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \quad (5)$$

となる。 A は任意定数である。(3)式の特解を探すと、明らかに

$$I(t) = \frac{V}{R} \quad (7)$$

は解であることがわかる。従って、(5)と併せて(3)の一般解は、

$$I(t) = A \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{V}{R} \quad (8)$$

となる。 $t=0$ で $I=0$ という初期条件を入れると、

$$A = -\frac{V}{R} \quad (9)$$

となるから、電流変化は次のように表される。

$$I(t) = \frac{V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] \quad (10)$$

次にRC回路（右）について考える。コンデンサーにたまる電荷を $q(t)$ とすると、電流は次のように表される。

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (11)$$

コンデンサーの両端の電圧は、電荷 $q(t)$ を用いて $q(t)/C$ と書けるので、スイッチをONにした状態で次の関係が成り立つ。

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = V \quad (12)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{V}{R} \quad (13)$$

これを(3)式を解く方法と同様にして解くと、

$$q(t) = CV \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] \quad (14)$$

となる。ただし初期条件として、 $t=0$ で $q=0$ を用いた。

流れる電流は(11)式を用いて

$$I(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (15)$$

となる。