解答例

第１問

(1) 直線上の点$\mathbf{r}'$が任意の点$\mathbf{r}$に作る磁場を積分することにより、点$\mathbf{r}$における磁場は次のようになる（ビオ・サバールの法則）。

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{r}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

円筒座標系を考えると、磁場のφ方向のみがゼロでない。磁場の向きは電流の方向に右ねじを回す方向になる。その成分の大きさは、

$$H_\varphi = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'\left(\dfrac{\rho}{\sin\theta}\right)\sin\theta}{\left(\dfrac{\rho}{\sin\theta}\right)^3} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3\theta}{\rho}dz'$$

となる。

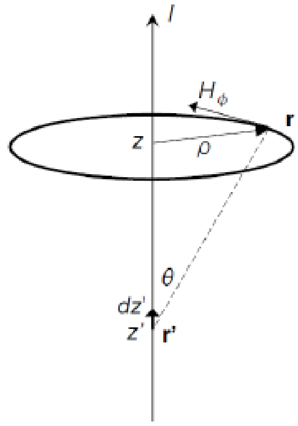
$$z - z' = \rho\cot\theta$$

$$dz' = \frac{\rho}{\sin^2\theta}d\theta$$

に注意して変数変換すると、

$$H_\varphi = \frac{I}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\rho}d\theta = \frac{I}{2\pi\rho}$$

を得る。



(2) ループ回路の中を貫く磁束は、

$$\Phi = \int_S B_\varphi dS = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{1}{\rho}d\rho = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}$$

と求められる。

(3) ループの起電力は

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0 Lk}{2\pi}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}$$

なので、流れる電流の大きさは、

$$I = \frac{\mu_0 Lk}{2\pi R}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}$$

である。電流の向きは磁束の増大を打ち消す方向なので、ＡＢＣＤの方向である。

第２問

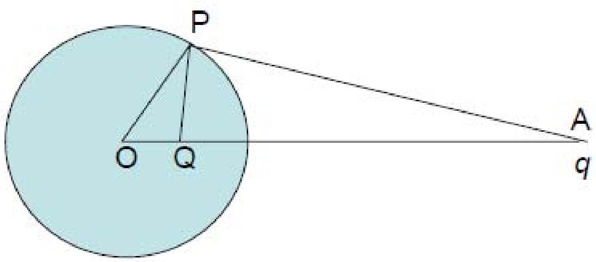
(1) $\mathrm{PO}:\mathrm{OQ} = a : a^2/r = r : a$ なので、$\Delta\mathrm{POQ}$ と $\Delta\mathrm{AOP}$ は相似になる。よって $\mathrm{PQ}:\mathrm{AP} = a : r$ となる。点Ｑに q' の電荷をおいて、球面上の電位が 0 になるようにすればよい。

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{\mathrm{PQ}} + \frac{q}{\mathrm{AP}}\right) = 0$$

なので、

$$q' = -\frac{aq}{r}$$

を得る。



(2) 電荷と鏡像電荷が引き合うことを考えればよいので、

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{aq^2}{r}}{\left(r - \frac{a^2}{r}\right)^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{arq^2}{\left(r^2 - a^2\right)^2} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{aq^2}{r^3}$$

となる。

(3) 導体球が接地されていないときは、電荷が保存しなければならない。鏡像電荷を打ち消す電荷を球の中心におけば、球面上の電位は一定となる。従って、その電位は、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{aq}{r}}{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{（一定）}$$

である。

(4) 電荷には鏡像電荷との間と、導体球の中心に置いた電荷との間の両方に力が働く。前者は引力、後者は斥力である。従って、電荷と導体球に働く力は次の式で与えられる。

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\frac{aq^2}{r}}{\left(r-\frac{a^2}{r}\right)^2}+\frac{\frac{aq^2}{r}}{r^2}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{arq^2}{\left(r^2-a^2\right)^2}-\frac{arq^2}{r^4}\right)$$

これを整理すると、$r >> a$ のとき、

$$F \approx -\frac{a^3q^2}{2\pi\varepsilon_0 r^5}$$

となる。

接地されている場合、大地から電荷が供給されるため正負電荷の単純な引力となるが、接地されていない場合、双極子モーメントが誘起され、それと電荷の間の引力となる。その結果、後者の方が r のべきが大きくなり、遠方では著しく弱くなる。

第３問

(1) ①はファラデーの法則、②はアンペールの法則を変移電流まで拡張したもの、③はガウスの法則、④は単一磁極が存在しないことを表している。

(2) ①の両辺の rot をとり、左辺にベクトル公式を適用すると、

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\mathbf{H})$$

となる。左辺第１項は③により 0 となる。右辺に②を代入すると、

$$\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

を得る。これを波動方程式の標準形、

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

と比べると、光速は次のように与えられる。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

(3) rot の定義に従って計算すると、x 成分は、

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

y 成分は、

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

z 成分は、

$$\frac{\partial H_u}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

となる。

(4) z 方向に進行する平面波の x 成分は、

$$E_x = f(z - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}})$$

のように表される。従って、

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} f' = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

である。一方、設問(3)の x 成分の式を z 方向に進行する平面波に適用すると、x 、y に関する微分は 0 となることに注意して、

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

なる関係式を得る。この式に前式を代入すると、

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

となる。これを積分することにより、

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_x$$

を得る。電磁波だけを考えているので、定数項は無視してよい。