電磁気学Ａ　中間試験　（担当：山本智）

2009 年 12 月 4 日

注意：　下記の３問のすべてに答えよ。
解答時間は 45 分　（9：00－9：45）。途中退席禁止
ノート、参考書、電卓、携帯などの持込禁止。
解答用紙は１枚とし、裏面使用可。ただし、裏面使用の場合はその旨記入のこと。

第１問

真空中において、電荷が原点Ｏを中心として半径 R の球状に電荷密度 $\rho\ (>0)$ で一様に分布しているとする。このとき、以下の設問に答えよ。なお、真空の誘電率は ε_0 とする。

(1) ガウスの法則を用いて、原点から $r\ (r > R)$ の距離だけ離れた点での電場の大きさと向きを求めよ。

(2) 同様に原点から $r\ (r \le R)$ の距離だけ離れた点での電場の大きさと向きを求めよ。

(3) 設問(1), (2)の結果を使って、静電ポテンシャル（電位）を原点からの距離 r（$0 < r < \infty$）の関数として求めて図示せよ。ただし、静電ポテンシャルは無限遠で 0 とする。

第２問

任意の形をした有限の大きさの導体がある。この導体に q の電荷を帯電させると、静電ポテンシャル（電位）は Φ であった。（静電ポテンシャルは無限遠で 0 とする）。このとき、以下の設問に答えよ。

(1) 導体内部で電場は 0 である。その理由を簡単に説明せよ。

(2) 導体表面では電場の方向は表面に垂直になる。その理由を簡単に説明せよ。

(3) この導体の静電容量を求めよ。

(4) 無限遠から電荷を徐々に運んでこの導体の電荷を q から q' に増やした。このとき静電エネルギーの変化を求めよ。

第３問

誘電体平板（誘電率 ε_1）に垂直に電場がかかっている状況を考える。これついて以下の設問に答えよ。なお、真空の誘電率は ε_0 とする。

(1) ガウスの法則を用い、電束密度が真空中でも誘電体中でも変化しないことを示せ。

(2) 誘電体内と真空中での電場の大きさの比を求めよ。

(3) 設問(2)のようになる物理的理由を、誘電体の分極と関連付けて説明せよ。

解答例

第１問

(1) 球の中心を原点とし、半径 $r\ (r > R)$ の球面Ｓをとる。すると、ガウスの法則より、

$$\int_S \mathrm{D}(r)\cdot \mathrm{n}\, dS = \int_V \rho dV$$

が成り立つ。対称性から左辺の電束密度は r だけの関数となり、かつ球面Ｓの法線方向を向く。また、右辺は球状分布した電荷の総量である。従って

$$4\pi r^2 D(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

よって、

$$D(r) = \frac{R^3\rho}{3r^2} \quad 3$$

となる。電場の大きさは、

$$E(r) = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}$$

であり、向きは正の動径方向である。

(2) 前問と同様に $r \leq R$ の場合を考える。左辺は同じだが、右辺は半径 r の球に含まれる電荷の総量になる。従って、

$$4\pi r^2 D(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

なので、

$$D(r) = \frac{r\rho}{3}$$

となる。電場の大きさは、

$$E(r) = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$$

であり、向きはやはり正の動径方向である。

(3) まず $r > R$ のときを考える。(1)の結果を用いると、

$$\Phi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = -\int_\infty^r \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r}$$

を得る。

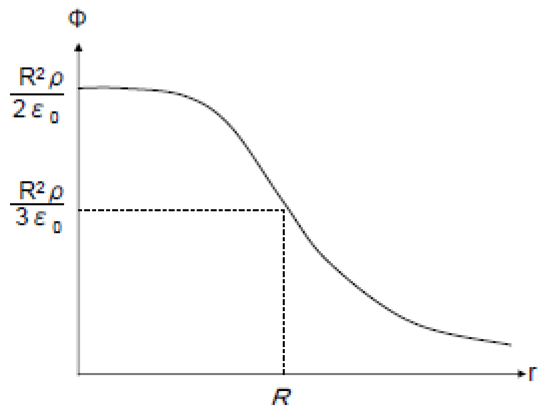
次に、$0 \leq r \leq R$ のときを考える。

$$\Phi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = -\int_\infty^R \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}dr - \int_R^r \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}dr = \frac{R^2\rho}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r^2 - R\ \ \right)$$

なので、これを整理して、

$$\Phi(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)$$

これを図示すると下図のようになる。



第２問

(1) 導体内部では自由電子が自由に動くことができる。もし、電場が 0 でなければ、自由電子が動き回って再配置し、電場を 0 にしてしまう。そのため、導体内では電場は 0 である。

(2) 導体は等ポテンシャルである（すべて電位が一定）。従って、導体表面は等ポテンシャル面である。電場は等ポテンシャル面に垂直になるので、導体表面に垂直になる。

(3) 静電容量の定義から、$C = \frac{q}{\Phi}$

(4) 電荷が q の時の静電エネルギーは

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\Phi}{2}$$

一方、q' のときの静電エネルギーは(3)で求めた静電容量を使って

$$U' = \frac{q'^2}{2C} = \frac{q'^2\,\Phi}{2q}$$

よって必要なエネルギーは、

$$\Delta U = \frac{q'^2 - q^2}{2q}\Phi$$

となる。

第３問

(1) 下図のような直方体の閉曲面を誘電体と真空の境界面に置く。真空中での電束密度を D_0、誘電体中での電束密度を D_1 とする（この問題では垂直に電場がかかっているので法線成分のみ存在する)。ガウスの法則から、

$$\int_S \mathrm{D}\cdot\mathrm{n}dS = \int_V \rho dV = 0$$

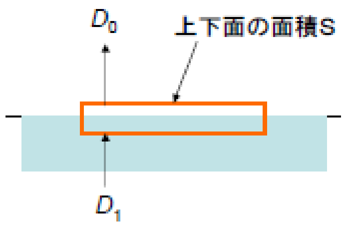
である。いま、直方体の厚みを限りなく 0 にすると、次の式が成り立つ。

$$D_0 S - D_1 S = 0$$

ここに、S は直方体の上面（下面）の面積である。これから、

$$D_0 = D_1$$

が示された。



(2) 上記の結果より、真空中の電場（E_0）と誘電体中の電場（E_1）には

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_1 E_1$$

の関係がある。従って、

$$E_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} E_0$$

となる。一般に、$\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ なので、誘電体中の電場は小さくなる。

(3) 誘電体中ではかかっている電場を打ち消すように分極が起こる。そのため、誘電体中での電場は真空中に比べて小さくなる。