補足１ ポアソン方程式の解の一意性

ポアソン方程式の解の唯一性を示すために、まずグリーンの定理を証明する。今、任意のスカラー関数ψに対してベクトル関数$\mathbf{V}$を次のように定義する。

$$\mathbf{V} = \psi \,\mathrm{grad}\,\psi$$

すると、ガウスの定理（註１）から、

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathrm{div}\mathbf{V} dV$$

ここで、

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$
$$= \psi \nabla^2 \psi + (\mathrm{grad}\,\psi)^2$$

である。なお、

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。これから、

$$\int_S \psi (\mathrm{grad}\,\psi)_n dS = \int_V \psi \nabla^2 \psi dV + \int_V (\mathrm{grad}\,\psi)^2 dV$$

を得る。これがグリーンの定理である。

いま、ポアソン方程式に境界条件を満たす解が２つあったとする。それらをϕ_1、ϕ_2とし、その差をψとする。即ち、

$$\psi = \phi_1 - \phi_2$$

とする。ϕ_1、ϕ_2は境界条件を満たすので、境界面Ｓで$\psi = 0$となる。従って、グリーンの定理の左辺は 0 になる。一方、ϕ_1、ϕ_2はポアソン方程式を満たすので、

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

が成立する。従って、グリーンの定理の右辺第一項は 0 になる。その結果、右辺第二項のみが残るので、

$$(\mathrm{grad}\,\psi)^2 = 0$$

となり、結局、

$$\mathrm{grad}\,\psi = 0$$

を得る。従って、

$$\psi = \mathrm{const}$$

であるが、境界面では 0 であったので$\psi = 0$となり、

$$\phi_1 = \phi_2$$

である。よって、解は一意的に決まる。

（註１）ガウスの定理は次のようにして示される。ガウスの法則とその微分形はそれぞれ

$$\int_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \rho dV$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$

なので、これから、

$$\int_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \mathrm{div}\mathbf{D}dV$$

を得る。これは任意のベクトル$\mathbf{D}$について成り立ち、体積積分と表面積分の関係を与えるものである。

補足２　電荷のない場所での divE=0 の確認

原点に電荷qを置く。原点以外の点で、$div\mathbf{E}=0$となることを$\mathbf{E}$の表式を用いて確かめる。　(x,y,z)点における電場は次のように書ける。（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に注意。）

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

従って、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

となる。定義にあてはめて上記の 3 つの和をとると、

$$div\,\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

が確認される。