宿題と解答（12 月 11 日分）

（問題１）

図１のような回路(Wheatstone Bridge)において、R_5 を流れる電流を求めよ。

（解答）

キルヒホッフの第一法則から、次の４つの式を得る。

$I_1 + I_2 - I = 0$ ①

$I_3 + I_5 - I_1 = 0$ ②

$I_4 - I_2 - I_5 = 0$ ③

$I - I_3 - I_4 = 0$ ④

これらのうち、３つが独立である。一方、キルヒホッフの第二法則から、次の３つの式を得る。

$I_2 R_2 + I_4 R_4 = V$ ⑤

$I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 = 0$ ⑥

$I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0$ ⑦

③と⑤より I_4 を消して

$I_2 R_2 + I_2 R_4 + I_5 R_4 = V$ 、

②と⑥から I_1 を消して

$I_3 R_1 + I_5 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 = 0$ 、

③と⑦から I_4 を消して

$I_3 R_3 - I_2 R_4 + I_5 R_4 - I_5 R_5 = 0$

となる。以上の３つの式から I_5 を求めると、次のようになる。

$$I_5 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4)V}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_4}$$

よく知られるように、$R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0$ のとき $I_5 = 0$ となる。

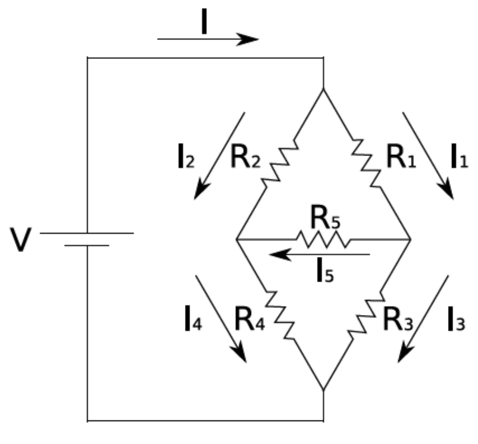

図１

（問題２）

図２のように一直線上に置かれた磁気双極子どうしに働く力を求めよ。ただし、$r >> l$ とする。

（解答）

２つの磁気双極子の磁極間(N,N), (S,S), (N,S), (S,N)に働く力はそれぞれ以下のようになる。

(N,N) 斥力　$F_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{r^2}$

(S,S) 斥力　$F_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{r^2}$

(N,S) 引力　$F_3 = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{(r+l)^2}$

(S,N) 引力　$F_4 = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_M^2}{(r-l)^2}$

F_1 と F_3 の和をとり、(l/r) で展開して $(l/r)^2$ のオーダーまでとると、

$$F_1 + F_3 = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[1-\left(1+\frac{l}{r}\right)^{-2}\right] = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[\frac{2l}{r} - 3\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]$$

となる。ここで、

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

を用いた。同様に、

$$F_2 + F_4 = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[1-\left(1-\frac{l}{r}\right)^{-2}\right] = \frac{q_M^2}{4\pi\mu_0 r^2}\left[-\frac{2l}{r} - 3\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]$$

となるので、力の合計は次のように求められる。

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -\frac{3q_M^2 l^2}{2\pi\mu_0 r^4} = -\frac{3m^2}{2\pi\mu_0 r^4}$$

力は r^{-4} に比例することに注意。

なお、相互作用エネルギーは、２つの磁気双極子を無限遠から r まで運ぶときのエネルギーに等しいので、

$$U = -\int_{\infty}^{r}\left(-\frac{3m^2}{2\pi\mu_0 r^4}\right)dr = -\frac{m_2}{2\pi\mu_0 r^3}$$

となる。

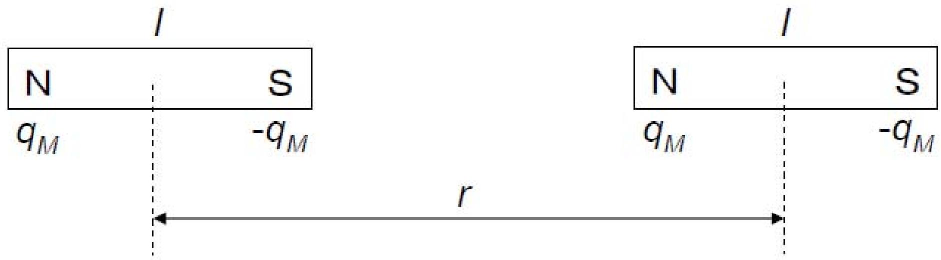

図２