宿題とその解答（11 月 6 日分）

（問題）

一様な電場（E）の中に置かれた接地されていない導体球（半径a）を考える。導体球の周りでの静電ポテンシャルを求めよ。

（解答例）

図のように導体球の中心 O を通る軸（z 軸）をとり、その軸上で O からR、$-R$だけ離れた点に電荷$-Q$、Qをそれぞれ置く。O における電場は導体球の存在を考えなければ、

$$E = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{1}$$

となる。Rを十分大きくし、Qを適当に設定してやることで、導体球を含む十分広い領域で一様電場Eを実現できる。

一方、$-Q$およびQの鏡像としては、授業でやったように$z = a^2/R$、$z = -a^2/R$の位置に$q' = aQ/R$、$q' = -aQ/R$の電荷をそれぞれ置くことに対応する。従って、２つの鏡像電荷はz軸方向を向いた電気双極子とみなせる。その大きさは

$$\mu = \frac{2a^2}{R}\frac{aQ}{R} = \frac{2Q}{R^2}a^3 \tag{2}$$

である。(1)式から

$$\frac{2Q}{R^2} = 4\pi\varepsilon_0 E \tag{3}$$

なので、これを(2)式に代入すれば

$$\mu = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E \tag{4}$$

となる。Rが無限大のとき、電気双極子の「長さ」は０になる。このような双極子を点双極子と呼ぶ。その場合でも双極子の方向は意味を持つ。

(4)の電気双極子の作る静電ポテンシャル（ϕ_1）は図に示すように角度θを定義すると、次ぎのように書ける。

$$\phi_1 = \frac{\mu\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{a^3 E\cos\theta}{r^2}$$

一方、一様な電場が作る静電ポテンシャル（ϕ_2）は、$z=0$において$\phi_2 = 0$とすると、

$$\phi_2 = -Ez = -Er\cos\theta$$

である。従って、両者がつくる静電ポテンシャルは和をとって、

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \left(\frac{a^3}{r^2} - r\right)E\cos\theta$$

となる。球面上（$r=a$）で$\phi=0$（一定）となり、導体面上の境界条件を満たしていることが確認できる。

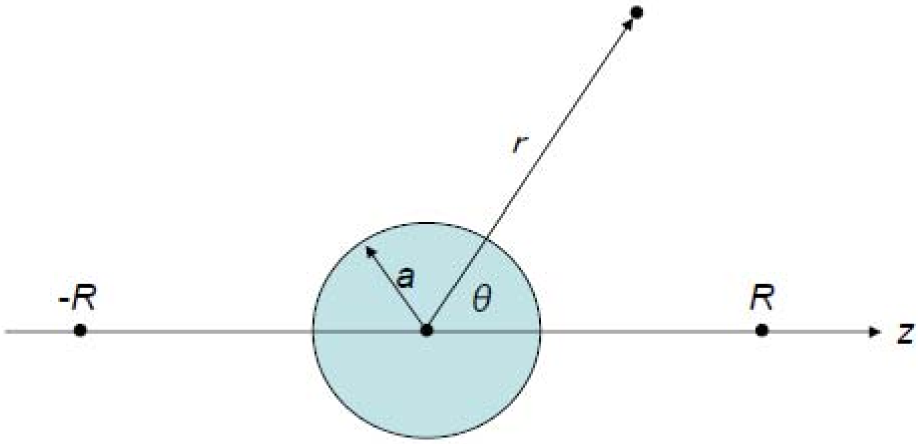

図１