

宿題とその解答 (10月30日分)

問題

$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$ を用いて、電気双極子モーメントに対する ϕ の表式から \mathbf{E} の表式を導け。

解答例

授業で示したように、電気双極子モーメントのつくる静電ポテンシャル（電位）は次のように与えられる。

$$\phi = \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

これを (x, y, z) 座標系で書き直す。 $\boldsymbol{\mu}$ は授業でやったように z 方向を向いていて、その成分しかないとする、 $\mu z = (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})$ なので、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mu z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

である。従って、

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\mu z \cdot (2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mu z}{r^5} x$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\mu z \cdot (2y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mu z}{r^5} y$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{3}{2}\mu z \cdot (2z)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - \mu(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\mu z}{r^5} z - \frac{\mu}{r^3} \right)$$

となる。また、

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$$

および、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

に注意して整理すると、次の式を得る。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right)$$