電磁気学A　期末試験　解答例

第１問

(1) 半径$r\ (r_1 < r < r_2)$の球面を考え、そこでガウスの法則を適用する。球面上の電場は０（導体）なので、球面の内部の電荷の総和は０でなければならない。球Ｍには電荷ｑが存在するので、球殻の内側表面には電荷-ｑが誘起されていることになる。もともと球殻Ｎには電荷がなかったので、球殻の外側表面には内側表面の電荷を打ち消すように電荷ｑが誘起されている。

(2) 半径$r\ (r > r_2)$の球面を考える。ガウスの法則から$4\pi\varepsilon_0 r^2 E = q$なので、電場は

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

となる。電位は上式を積分して、

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

となる。

(3) (1)と同様の球面を考え、ガウスの法則を適用する。球面上の電場は０（導体）なので、球面の内部の電荷の総和は０になる。今回は球Ｍに電荷が存在しないので、球殻の内側表面に電荷が誘起されることはない。また、球Ｍの表面にも電荷は誘起されない。従って、球殻内側表面の電荷、球Ｍの表面の電荷ともに０である。

第２問

(1) 円に沿った微小変位を$d\mathbf{r}'$とすると、ビオ・サバールの法則から原点における磁場は

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{r}'\times(-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|^3}$$

なので、磁場の向きはｚ方向となる。$dr' = a\,d\varphi$と中心角で表せることに気をつけて、大きさは、

$$H_z = \frac{I}{4\pi a}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2a}$$

と求まる。

(2) 微小変位を$d\mathbf{r}'$からの磁場はｚ成分とr成分を持つが、後者は積分するとゼロになる。従って、ｚ成分は次のように求めることができる。

$$H_z = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\,d\varphi}{a^2+h^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{I}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+h^2\right)^{3/2}} \approx \frac{Ia^2}{2h^3}$$

最後は$h >> a$の場合である。積分の中の$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$は$z$成分を取る因子である。

（別解）

　アンペールの法則から、$z = h$における磁位はその点から見込む円形ループの立体角をΩとすると、t

$$\phi_M = \frac{I\Omega}{4\pi}$$

である。$h >> a$の場合、$\Omega = \dfrac{\pi a^2}{h^2}$なので、

$$\phi_M = \frac{Ia^2}{4h^2}$$

を得る。従って磁場はこれをhで微分して得られる。

$$H_z = -\frac{d\phi_M}{dh} = \frac{Ia^2}{2h^3}$$

(3) キルヒホッフの法則から、加えた交流電圧Vと起電力Eの和は0になる。起電力は自己インダクタンスLを用いて、

$$E = -L\frac{dI}{dt}$$

と書けるので、

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}V_0\cos\omega t$$

となるから、電流は次のように書ける。

$$I = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t$$

(4) (1)と(3)の結果から、円形ループ回路Aの中心部分における磁場は、

$$H_z = \frac{V_0}{2a\omega L}\sin\omega t$$

となる。円形ループ回路Bに生じる起電力は

$$E_B = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi b^2\mu_0\frac{V_0}{2aL}\cos\omega t$$

方向は上からみて右まわりになるので、$t = 0$でRの方が電位が高くなる。

よって、

$$E_B = \pi b^2\mu_0\frac{V_0}{2aL}\cos\omega t$$

第３問

(1) (a)式はファラデーの法則、(c)式はガウスの法則（電荷＝0）を表す。

(2) (a)式の両辺の rot をとると、

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{B} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

右辺に（b）式を代入し、左辺をベクトル公式で変形する。

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

ここで $\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$ （式(c)）を使うと、波動方程式

$$\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

を得る。同様に(b)式の rot をとって計算すると

$$\nabla^2\mathbf{H} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$$

を得る。波動方程式の標準形

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

と比べて、いずれも速度 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ で進む波を表す。

(3) z 方向に進む平面波を考える。電場、磁場とも x, y 方向には一定なので、それぞれ、$\mathbf{E}(z,t)$ 、$\mathbf{H}(z,t)$ と表される。(c)式、(d)式を適用すると x 微分、 y 微分は 0 になるので、

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

および

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

を得る。電磁波は空間的に電場、磁場が変動しているので、上の２式は電磁場の進行方向成分（ z 成分）が 0 であることを意味する。このことは縦波成分が存在しないことを意味する。よって、平面波の電磁波は横波である。