電磁気学 A　中間試験　解答例

第１問

(1) 導体球の中心を原点とする。原点を中心として導体球を含む半径 r の球面を考えてガウスの法則を適用する。対称性から球面上での電場の大きさ E は同じで、向きは動径方向であるので、次のように簡略化される。

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E = q$$

これから、

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

を得る。

(2) 導体内には自由電子が存在する。もし、電場が存在すると、その電場を打ち消すように自由電子が配置するはずである。従って、導体内の電場は 0 である。

(3) 導体内の１点をとり、その点を中心とする微小球面 S を考える。その微小球面に対してガウスの法則を適用する。

$$\int_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \rho dV$$

設問(2)の結果から電場（電束）は 0 なので S の取り方によらず左辺は 0 でなければならない。従って、導体内では、$\rho = 0$、即ち電荷は存在しない。

(4) 無限遠から電場を積分して求める。

$$\phi = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (r > R)$$

導体内では電位は一定なので、

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (r \le R)$$

となる。

(5) 設問(4)の結果から、$q = C\phi$ の定義にあてはめると、$C = 4\pi\varepsilon_0 R$ を得る。

(6) dq の電荷を無限遠から運ぶのに必要なエネルギーは ϕdq なので、これを積分して必要なエネルギーが求められる。

$$U=\int_0^q \phi dq=\int_0^q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}dq=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

(7) 周囲を誘電体で満たすと、球の持つ静電エネルギーは、

$$U=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon R}$$

となる。一般に$\varepsilon>\varepsilon_0$なので、静電エネルギーは下がる。下がった分のエネルギーは、誘電体を分極するのに用いられている。

第２問

(1) 導体平面からＰ点とは面対象の位置Ｑに鏡像電荷$-q$を置く。(x,y)平面上での電場は、Ｐ点の電荷とＱ点の鏡像電荷の寄与の重ね合わせで求めることができる。

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z_0{}^2)}\frac{(-z_0)}{(x^2+y^2+z_0{}^2)^{1/2}}+\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z_0{}^2)}\frac{z_0}{(x^2+y^2+z_0{}^2)^{1/2}}$$

$$=-\frac{qz_0}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z_0{}^2)^{3/2}}$$

マイナスの符号はＰ点からＱ点へ向かう方向を示す。

(2) 電荷と鏡像電荷が引き合うと考えればよいので、力の大きさは

$$F=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z_0^2}$$

となる。力の方向は、金属表面に引き付けられる方向である。

(3) 原点に$2qz_0$の大きさの双極子モーメントを置いたときの電位を求めればよい。この双極子モーメントが真空中に作る電位は、十分遠方において、

$$\phi=\frac{2qz_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{qz_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

と求められる。