誘電体に生じた分極が作る静電ポテンシャル

誘電体に生じた分極が作る静電ポテンシャルを求める。なお、分極を生じさせた電場とその静電ポテンシャルは除いて考える。実際は２つの重ね合わせになることに注意。

$\mathbf{r}'$ の位置にある微小体積 dV に含まれる分極 $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ が位置 $\mathbf{r}$ に作る電位は、双極子モーメントが作る電位をあてはめて、

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV$$

となるので、誘電体全体では、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV$$

と書ける。

この計算のために、$\mathrm{div}'\left(\dfrac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$ の計算をする。div' にある「 ' 」は $\mathbf{r}'=(x',y',z')$ での微分で div を計算することを意味する。

$$\mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{P_x}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{\partial}{\partial y'}\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial P_x}{\partial x'} + P_x\frac{x-x'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

＋　(y成分＋ z 成分）

$$= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\frac{\partial P_x}{\partial x'}+\frac{\partial P_y}{\partial y'}+\frac{\partial P_z}{\partial z'}\right) + \frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

これから、

$$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{div}'\mathbf{P}$$

という関係があることがわかる。上記の積分の式に代入すると、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathrm{div}'\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV$$

となる。ガウスの定理（補足１の註）を使って、右辺第一項の体積積分を表面積分に変えると、次の式を得る。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dS - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathrm{div}'\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV$$

ここで、

$$\rho_P = -\mathrm{div}'\mathbf{P}$$

と定義し、これを（内部）分極電荷と呼ぶことにする。すると、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV$$

となる。この第一項は表面分極電荷$\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$の作るポテンシャル、第二項は内部分極電荷の作るポテンシャルと理解できる。このように誘電体には見かけ上の分極電荷が生じていることがわかる。